অজান দেশত লিমাকণহঁত

ড° কৈলাশ গোস্বামী

অজান দেশত লিমাকণহঁত

ড° কৈলাশ গোস্বামী

প্ৰাক্তন অধ্যাপক, গণিত বিভাগ

বি. বৰুৱা মহাবিদ্যালয়, গুৱাহাটী-৭৮১০০৭

অসম বিজ্ঞান সমিতি

Ajan Deshat Limaconhot : A book to popularise mathematical ideas in a drammatical form (Ganitik Alekhya) authored by Dr. Kailash Goswami, former senior lecturer, Dept. of Mathematics, B. Borooah College, Guwahati-7 and published by Assam Science Society, Assam

© লেখক

প্ৰথম প্ৰকাশ ঃ ১০ ফেব্ৰুৱাৰি, ২০১৪ ইং চন

প্ৰকাশক ঃ প্ৰধান সচিব
অসম বিজ্ঞান সমিতি

প্ৰকাশন উপ-সমিতি (২০১৩-২০১৫) ঃ
ড° দীনেশ চন্দ্ৰ গোস্বামী (উপদেষ্টা)
ড° ৰমেশ চন্দ্ৰ গোস্বামী
ড° অনুপ কুমাৰ তালুকদাৰ
ড° জগদ্বীন্দ্ৰ ৰয়চৌধুৰী
শ্ৰীজয়ন্ত কুমাৰ মান্তা
ড° কন্দৰ্প ফুকন
শ্ৰীধ্ৰুৱজ্যোতি কলিতা
ড° হিৰণ্য কুমাৰ চৌধুৰী (আহ্বায়ক)

বেটুপাত ঃ নৰজ্যোতি দেৱচৌধুৰী

টাইপ ছেটিং ঃ পবিত্ৰ কুমাৰ শৰ্মা, সনাতন দাস

মূল্য ঃ ১০০.০০ (এশ) টকা

মুদ্ৰণ ঃ ডাউন টাউন কম্পিউটাৰ, অমিটাভ কুটীৰ
শ্লুইচ গেট, ভৰলুমুখ, গুৱাহাটী - ৭৮১০০৯
ফোন ঃ +৯১ ৯৫৭৭৭-০৬৯৯০

সমিতিৰ তৰফৰ পৰা দুআষাৰ

অসম বিজ্ঞান সমিতিয়ে ১৯৬৪ চনৰপৰা বিজ্ঞান আৰু গণিতৰ জনপ্ৰিয় পুথি প্ৰকাশ কৰি আহিছে। সমিতিয়ে বৰ্তমানলৈ ১৬০ খনৰো অধিক পুথি প্ৰকাশ কৰিছে আৰু ইয়াৰে আটাইকেইখন পুথিয়ে পাঠক-পাঠিকাৰ দ্বাৰা সমাদৃত। গুৱাহাটীৰ বি. বৰুৱা মহাবিদ্যালয়ৰ গণিত বিভাগৰ অৱসৰপ্ৰাপ্ত অধ্যাপক ড° কৈলাশ গোস্বামীদেৱ পাঠক সমাজৰ সুপৰিচিত। তেখেতে গণিতৰ পাঠ্যপুথিৰ উপৰিও একে বিষয়ৰ বহুকেইখন পুথি ৰচনা কৰিছে। 'অজান দেশত লিমাকণহঁত' নামৰ এই পুথিখন গণিত জনপ্ৰিয়কৰণৰ ক্ষেত্ৰত তেখেতৰ শেহতীয়া অৱদান। আশা কৰো পুথিখনে গণিতৰ লগত জড়িত ব্যক্তি তথা ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলক উপকৃত কৰিব। পুথিখনৰ লেখক ড° গোস্বামীক অসম বিজ্ঞান সমিতিৰ হৈ আন্তৰিক ধন্যবাদ জ্ঞাপন কৰিছো। লগতে পুথিখনৰ প্ৰকাশৰ সৈতে জড়িত সকলো ব্যক্তিলৈ, বিশেষকৈ বি. বৰুৱা মহাবিদ্যালয়ৰ সহযোগী অধ্যাপক ড° হোমেশ্বৰ কাকতিৰ প্ৰতি আমি অশেষ কৃতজ্ঞ।

অসম বিজ্ঞান সমিতিৰ বিগত আৰু বৰ্তমানৰ কাৰ্যনিৰ্বাহকৰ প্ৰকাশন উপসমিতিৰ আহ্বায়ক ক্ৰমে ড° অনুপ কুমাৰ তালুকদাৰ আৰু ড° হিৰণ্য কুমাৰ চৌধুৰীলৈ আমি ধন্যবাদ জনাইছো।

শেষত সমিতিৰ আন প্ৰকাশন সমূহৰ দৰে এই পুথিখনেও পাঠক সমাজৰ সমাজৰ পালে আমি কৃতজ্ঞ হ'ম।

ধীৰেশ্বৰ কলিতা
প্ৰধান সচিব

প্ৰকাশন উপসমিতিৰ আহ্বায়কৰ একাষাৰ

গণিত হ'ল বিজ্ঞানৰ ভাষা। বিজ্ঞান অধ্যয়ন কৰিবলৈ গণিতৰ ধাৰণাসমূহৰ সম্যক জ্ঞান একান্ত প্ৰয়োজনীয়। আমাৰ দেশৰ স্কুলীয়া পাঠ্যক্ৰমৰপৰাই এই ধাৰণাসমূহ হৃদয়ংগম কৰা সহজ নহয়। আনুষ্ঠানিক পাঠ্যক্ৰমৰ ধৰা-বন্ধা সময়ো বহুক্ষেত্ৰত হেঙাৰ হয়। গণিত বা বিজ্ঞান শিকাওঁতে এক আনন্দ হ'ব পাৰে সেয়া আনুষ্ঠানিক শিক্ষাগ্ৰহণত কাচিৎহে প্ৰতিফলিত হয়। অনানুষ্ঠানিক শিক্ষাৰ প্ৰয়োজন ইয়াতেই।

গণিত শিক্ষণ আৰু শিক্ষাগ্ৰহণ আনন্দদায়ক কৰিবলৈ ড° কৈলাশ গোস্বামীয়ে 'অজান দেশৰ লিমাকণহঁত' নামৰ এই পুথিখন লিখি উলিয়াইছে। ড° গোস্বামী ছাত্ৰ-ছাত্ৰী আৰু আন পাঠকৰ অতি পৰিচিত। পাঠ্যপুথিৰ উপৰিও গণিতৰ বহুকেইখন জনপ্ৰিয় পুথি তেওঁ ৰচনা কৰিছে। গণিতৰ এগৰাকী সফল শিক্ষক হিচাপেও তেওঁ ছাত্ৰসমাজৰ শ্ৰদ্ধাভাজন হৈছে। মুঠৰ ওপৰত গণিতৰ শিক্ষণ আৰু শিক্ষাগ্ৰহণত ড° গোস্বামীয়ে আজীৱন ব্ৰতী হৈ আছে।

এই পুথিখনত গণিতৰ কিছুমান ধাৰণা (যেনে— মেট্ৰিক্স, সংহতি আদি) অতি সহজ-সৰলভাৱে উপস্থাপন কৰা হৈছে। কথোপকথন ভংগীৰে উপস্থাপন কৰা বাবে ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলে পঢ়ি আনন্দ পাব। শিক্ষকসকলেও পুথিখনৰ দ্বাৰা যথেষ্ট উপকৃত হ'ব। পাঠদানত পুথিখন যথেষ্ট সহায়ক হ'ব।

অসম বিজ্ঞান সমিতিৰ অন্যতম উদ্দেশ্য হ'ল বিজ্ঞান আৰু গণিতৰ শিক্ষণ-শিক্ষাগ্ৰহণৰ মান উন্নীত কৰা। এই প্ৰচেষ্টাৰ অংশ বিশেষ হ'ল ড° কৈলাশ গোস্বামীৰ এই পুথিখন।

পুথিখনৰ প্ৰকাশৰ সৈতে বহুকেইগৰাকী ব্যক্তি জড়িত হৈ আছে। সেইসকলৰ ভিতৰত ড° অনুপ কুমাৰ তালুকদাৰ আৰু ড° হোমেশ্বৰ কাকতি অন্যতম। তেখেতসকলক ধন্যবাদ জনাইছো। আমাৰ প্ৰকাশন উপসমিতিৰ সকলো সদস্যলৈও কৃতজ্ঞতা জ্ঞাপন কৰিছো। পুথিখন ছপা কৰা বাবে সদা শৰ্মাকো ধন্যবাদ জনাইছো।

হিৰণ্য কুমাৰ চৌধুৰী
আহ্বায়ক, প্ৰকাশন উপসমিতি
অসম বিজ্ঞান সমিতি

প্রেক্ষাপট

আভিযান্ত্রিক কলা-কৌশলৰ ধ্বজাৰে আগবাঢ়ি যোৱা আধুনিক বিজ্ঞানৰ ঘাই আধাৰ হ'ল গণিত। গণিতক আওহেলা কৰি বিজ্ঞানৰ কোনো দিশতে আজিৰ নাগৰিক এজন বিদ্বান হ'ব নোৱাৰে। আনহাতে নিৰ্দিষ্ট কোনো এটা দিশত লগা গণিতৰো সীমা পৰিধি নাই। বিস্তীৰ্ণ গভীৰ সাগৰৰ দৰে গণিতৰ সবিশেষ ভূ কোনেও পাব নোৱাৰে। সেয়ে প্ৰয়োজনীয় গণিতবিধ পাবৰ কাৰণে আমি কিদৰে নিজকে সাজু কৰিব পাৰো ? অৱশ্যে সমুদ্ৰৰ বুকুত চৰিবলৈ অন্ততঃ হাতত বঠাৰে সৈতে পালতৰা নাও এখনৰ ওপৰত যদি আমাৰ চাতুৰ্য্য কলা-কৌশল থাকে, তেন্তে তাৰ ওপৰত কৰা আধিপত্যৰে আমি নিৰ্ণেয় দিশ এটা বিচৰাত সহায় পাব পাৰো। একেদৰে উপযুক্ত সজুলি আৰু আধাৰ থাকিলে এজনে যিকোনো অচিনাকী গণিতৰ প্ৰতি সাজু হ'ব পাৰে।

সাধাৰণ পাঠ্যপুথিয়ে গণিতৰ আৱশ্যকীয় সকলো প্ৰজ্ঞানতা দিব নোৱাৰে। সজুলিৰ লগতে সপ্ৰাণ বুজ আৰু চাতুৰ্থ দিব পৰা উপায় এটাৰো প্ৰয়োজন।

সেয়ে গতানুগতিক শিক্ষাৰ পৰিসৰৰ পৰা ওলাই বিশেষ গাণিতিক কাৰ্যিক্ৰমবোৰে এই অভাৱ পূৰ কৰিব পাৰে। তাৰোপৰি শ্ৰেণীকোঠাৰ বাহিৰৰ অৱকাশ মুহূৰ্তবোৰত কৰা গাণিতিক কৰ্মবোৰে খেল-ধেমালিৰ জৰিয়তে আগবঢ়োৱা নতুন দিশ, ৰঙীণ দিগন্তৰ সৈতে গতানুগতিক গণিতৰ বিষয়ৰ গভীৰ বুজ উপলব্ধি কৰাত সহায় কৰে। লগতে এইবোৰে বিনোদনৰ মাজেৰে গণিতৰ মায়াভৰা পৰিবেশ এটালৈ কঢ়িয়াই নিব।

আমি এইটোও মন কৰিব লাগে যে গণিতৰ উত্তেজনা থাকে নতুন সৃষ্টি, নতুন কল্পনা, সংগ্ৰামৰ অন্তত লাভ কৰা সমস্যাৰ ফল প্ৰাপ্তি আৰু সমাধানৰ পথ উদ্ভাৱনত। আন ভাষাত আমি মন কৰিব লাগিব এই প্ৰতিভা থকা কিশোৰ-কিশোৰীহঁতৰ জ্ঞান চিন্তাৰ বিকাশৰ উত্তোলনত।

কিতাপখন লিখাৰ পৰিকল্পনাত প্ৰকৃততে এইবোৰ কথাক আধাৰ সাৰথি হিচাপে লোৱা হৈছে। সেই ভিত্তিতে ইয়াৰ বিষয়বোৰো যথেষ্ট সাৱধানতাৰে নিৰ্বাচন কৰা হৈছে। লগতে দীৰ্ঘদিনীয়া শিক্ষা অভিজ্ঞতাৰে ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ মানসিক পুষ্টি অভাৱৰ কাৰণখিনিও সামৰি লোৱা হৈছে।

মন কৰিবলগীয়া যে বিদ্যালয়, মহাবিদ্যালয়ৰ পৰা উৎসাহজনক ফল লাভ কৰিও বেছিভাগ ছাত্ৰই (লগতে কিছুমানে শিক্ষক হোৱাৰ পিছতো) গণিতৰ বহুতো প্ৰাথমিক ধাৰণা, জ্ঞান আৰু গুৰুত্ব বুজি নোপোৱাকৈয়ে পাৰ হৈ যায়। ইয়াৰ মূল কাৰণ পাঠ্যপুথিয়ে সেইবোৰ সামৰিব নোৱাৰে। শিক্ষকে মূল ধাৰণাৰ তথাকথিত প্ৰকৃত ৰূপবোৰ যথাযথভাৱে আৰু জনপ্ৰিয়ভাৱে ব্যাখ্যা কৰিব নোৱাৰে। আমাৰ বিবেচনাৰে মুখ্য বুলি ভবা গাণিতিক আৰ্হি, পদ্ধতি আৰু কৌশল কিছুমানৰ লগত ছাত্ৰ-ছাত্ৰীক কৈশোৰৰ পৰাই চিনাক্ত কৰিব পাৰিলে পিছলৈ ইয়ে যি কোনো গাণিতিক চিন্তা, কল্পনা আৰু বুজাত দ্ৰুতভাৱে সহায় কৰিব পাৰিব।

এইবোৰ আপাহতে জন্ম 'অজান দেশত লিমাকশহঁত'ৰ। বিষয়বস্তুবোৰ ৰূপক আৰ্হিত অলপ নাটকীয়ভাৱে আৰু সৰলৰূপত বাস্তৱৰ লগত সমন্বয় ৰাখি জনপ্ৰিয় আৰু বাস্তৱ অচিনাকী ৰঙীণ পথেৰে ব্যাখ্যা কৰা হৈছে। বিমূৰ্ত ধাৰণাকো আনকি ৰং-বিনোদনেৰে কৰা এই নিবেদন ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ আকৰ্ষণীয় হ'ব বুলি ভাবিছো।

ইয়াত দেখাত নিৰ্বাচিত বিষয় মাত্ৰ দহটা হ'লেও প্ৰতিটোৱে অনেক নতুন অচিনাকী কথাৰ সম্ভেদ দিব। গাণিতিক আৰ্হিকে খেলৰ সামগ্ৰীৰূপে প্ৰদৰ্শন কৰা হৈছে যাতে ইয়ে ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ মনত গাণিতিক সৌন্দৰ্যৰ চাপ বহুৱায়। অৱশ্যে কিতাপৰ কলেবৰৰ খাতিৰত এনেদৰে অন্তৰ্ভুক্ত কৰিব পৰা অইন বহুতো ধাৰণা বাদ পৰি ৰৈছে। পিছলৈ এনে প্ৰচেষ্টা চলাই ৰখা হ'ব।

যিয়েই নহওক ছাত্ৰ-ছাত্ৰী শিক্ষকসকলে এই খিনি নিবেদন আদৰিব পাৰিলে লেখকৰ উদ্দেশ্য সফল হোৱা বুলি ধৰিম।

কিতাপখন প্ৰকাশত আগভাগ লোৱা বাবে অসম বিজ্ঞান সমিতিৰ প্ৰতি কৃতজ্ঞতা জনালো।

১০ ফেব্ৰুৱাৰি, ২০১৪

লেখক

বিষয় সূচী

প্ৰথম দিন	ঃ	চিনাতলীৰ অচিন চুকত	৭
দ্বিতীয় দিন	ঃ	ৰিমা, ৰাদু আৰু ৰকেট	২১
তৃতীয় দিন	ঃ	ক্ৰমে ক্ৰমে অনুক্ৰম	২৯
চতুৰ্থ দিন	ঃ	পদকৰ স্থান, তালিকাৰ মান	৪০
পঞ্চম দিন	ঃ	নাহৰ, চেগুণ, বিশ্বপৰিবেশ আৰু আইচক্ৰীম	৫২
ষষ্ঠ দিন	ঃ	প্ৰতিৰূপ, কেৰমবোৰ্ড আৰু অশ্বাৰোহী সৈন্য	৬২
সপ্তম দিন	ঃ	স্থানান্তৰ আৰ্হি আৰু সৌন্দৰ্য	৭৭
অষ্টম দিন	ঃ	চিধাৰেখাৰে বেকা যাদুচিত্ৰ— মোৰ কলিজাটো	৯১
নৱম দিন	ঃ	সম্পৰ্কেৰে বনাও চিত্ৰ	১০৫
দশম দিন	ঃ	বিমূৰ্ত্তৰ অচিন চুকত লিমাকণহঁত	১৪১

প্ৰথম দিন

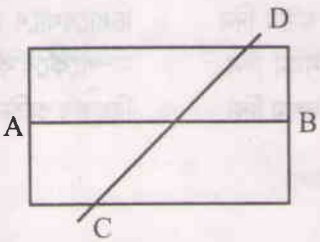
চিনাতলীৰ অচিন চুকত

গ্ৰীষ্মকালীন গণিতৰ শিবিৰ। সুন্দৰদিয়া হাইস্কুললৈ আহিছে সেই অঞ্চলৰ মাধ্যমিক, উচ্চ মাধ্যমিক স্কুলৰ বহুতো ছাত্ৰ-ছাত্ৰী শিক্ষক ; নিমন্ত্ৰিত অতিথিপ্ৰবক্তা কেবাজনো। প্ৰতিজনে ক'ব গণিতৰ একো একোটা ৰংচঙীয়া দিশৰ ওপৰত, নাইবা সূক্ষ্ম জোঁটলগা কথাবোৰ বিতৰ্ক, আলোচনা আৰু ৰং ধেমালিৰ মাজেৰে বাস্তৱ ধাৰণাৰ ব্যাখ্যাৰ ওপৰত।

ব্যৱহাৰিক গণিতৰ ওপৰত পাঠ আগবঢ়াব গৈছে নন্দন প্ৰতীম চৌধুৰী বা চুটিকৈ এন পি চি ছাৰে। তেওঁৰ বিষয়ৰ শিৰোনাম 'বাস্তৱ দৃষ্টিৰে জ্যামিতি আৰু বীজগণিত'। শ্ৰেণীত সোমায়েই ছাৰে হাতত লৈ যোৱা বগা কাকত এখন দেখুৱাই মাজত এটা ভাঁজ দি সুধিলে ঃ

ছাৰ ঃ এইটো কি?

নিপুকণ ঃ ছাৰ, এইটো এটা সৰল ৰেখা।



ছাৰ ঃ হয়, আমি ইয়াক নাম এটা দি যেনে AB সৰল ৰেখা বুলি কম। তেনে দৰে CD অইন এটা ৰেখা। এই দুয়োটা ৰেখাই কটা অৱস্থানটোক এটা বিন্দু বোলা হয়।

অংকিত ঃ 'ছাৰ, বিন্দু বা ৰেখা প্ৰকৃততে কাক বোলে?' প্ৰবালে সুধিলে।

ছাৰ ঃ কাক বোলে কৈ দিব বা লিখি দিব নোৱাৰো, কিন্তু আমি অনুভৱ কৰি বা চিনিহে পাব পৰো। গণিতত এনে বহুতো মৌল আছে যাক কোনো এটি নিৰ্দিষ্ট বিবৃতিৰে দ্ব্যৰ্থহীন বা যথাৰ্থভাৱে প্ৰকাশ কৰিব পৰা নাযায়। এনে পদ বা মৌলবোৰকে অসঙ্গিত (undefined) বুলি কোৱা হয়। বিন্দু, ৰেখা, সংখ্যা, সংহতি— এনে বহুতো প্ৰাথমিক ধাৰণাই অসঙ্গিত। তৰোপতি

যিবোৰ কথা সংজ্ঞাৰ বাহিৰত সেইবোৰো অসঙ্গিত। যেনে— হৰণৰ সংজ্ঞাৰ ভিতৰত $1 \div 0,\ -7 \div 0,\ 0 \div 0$ আদি নপৰে বাবে এইবোৰ অসঙ্গিত।

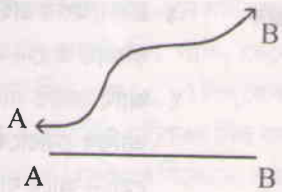
কিছুমানে বিন্দু এটাক বৃত্ত এটা বুলিও ক'ব পাৰে যাৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ শূন্য অৰ্থাৎ ই বৃত্তৰ নিম্নতম আকাৰৰ অৱস্থা। কিন্তু তেনেকৈ ক'বলৈ হ'লেও বৃত্ত এটাৰ কেন্দ্ৰটো বিন্দুহে আৰু বিন্দুৰ ধাৰণাক উপেক্ষা কৰি বৃত্তৰ ধাৰণাৰে বিন্দুৰ সংজ্ঞা দিয়াতো নিৰৰ্থক হ'ব। সেয়ে আমি সূক্ষ্ম পেঞ্চিলৰ জোঙ বা বেজিৰ আগৰ ফুট ইত্যাদি বিভিন্ন ধাৰণাৰে আগবাঢ়ি বিন্দুৰ অনুভৱ বা বুজ ল'ব পাৰো। ৰেখাবোৰ আকৌ বিন্দুৰ সংহতি। এই কথাটো সত্য হ'লেও ই ৰেখাৰ সংজ্ঞা হ'ব নোৱাৰে। কাৰণটো স্পষ্ট, যিহেতু বাক্যটো দ্ব্যৰ্থক।

নিপুকন ঃ কিন্তু ছাৰ, এই অসঙ্গিত ধাৰণাৰে ব্যাখ্যা কৰি গ্ৰহণ কৰা বিষয় বা যুক্তিবোৰ জানো বিসঙ্গতিপূৰ্ণ নহ'ব?

এন পি চি ছাৰ ঃ ভাল কথাই ভাবিছা। যুক্তি তত্ত্বৰোৰ বাস্তৱ সত্যৰ আধাৰতহে প্ৰস্তুত কৰা হয়। যেনে— 'মানুহ মৰণশীল' বুলি ক'লে প্ৰথমে আমি মানুহৰ ধাৰণাটো বুজি লম। মানুহৰ প্ৰকৃত সংজ্ঞা নাই, কিন্তু মানুহ বুলিলে কি আমি জানো। এই বাস্তৱ সত্যটো আমি গ্ৰহণ কৰিহে অইন কথাবোৰৰ সিদ্ধান্ত লও। বিজ্ঞানৰ সকলো তথ্যই কোনোবা শৃংখলত আগবাঢ়ি এটা নিৰ্দ্দিষ্ট সিদ্ধান্তলৈ আগবঢ়াৰ বাবে কিছুমান বাস্তৱ আৰু স্বতঃসিদ্ধ কথাৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰিবলগীয়া হয়। এইবোৰৰ কোনো সংজ্ঞাৰ প্ৰয়োজন নাই।

অংকিত ঃ ছাৰ, বেকা বা পোন ৰেখা এটা আমি বোৰ্ডত আঁকিব পাৰোনে?

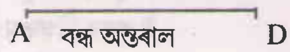
ছাৰ ঃ প্ৰকৃততে নোৱাৰো। কিন্তু আমি সেই চিত্ৰটোৰে ৰেখাটো বুজাবহে পৰো। কাৰণ ৰেখাৰ কোনো প্ৰস্থ নাই, কোনো সীমা নাই আৰু ৰেখাৰ যি কোনো দুটা বিন্দুৰ মাজত অসীম সংখ্যক বিন্দু আছে বাবে ইয়াৰ মাজত ফাঁক বা ফুটা নাই।

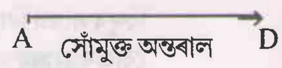


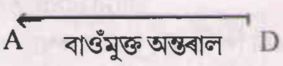
যদি আমি এটা ৰেখা AB অংকন কৰো তেন্তে ইয়াৰ মাত্ৰ এটা অংশহে বোৰ্ডত আঁকো। সেয়ে গোটেই ৰেখাটো বুজাবলৈ AB, $\overleftrightarrow{AB}$ আদি প্ৰতীক ব্যৱহাৰ কৰা হয় আৰু খণ্ডৰেখা বুজাবলৈ $|AB|$, $\overline{AB}$ বা কেতিয়াবা অকল AB প্ৰতীকো ব্যৱহাৰ কৰো।

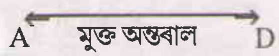
কিশোৰ ঃ ছাৰ, ৰেখাখণ্ডৰ শেষ বিন্দু আছেনে?

ছাৰ ঃ এইটো এটা সৰল প্ৰশ্ন। ৰেখাখণ্ডৰ শেষ বিন্দু আছে। প্ৰকৃততে এটা ৰেখাৰ (যেনে ABৰ) যিকোনো দুটা বিন্দুৰ (যেনে A আৰু B) মাজৰ আটাইবোৰ বিন্দুৰ সংহতিটোৱে এটা ৰেখাখণ্ড বা সেই ৰেখাটোৰ এটা **অন্তৰাল**। যদি A আৰু B বিন্দুদুটাকো সেই অন্তৰালটোৰ ভিতৰত ধৰা তেন্তে এই অন্তৰালটোৰ নাম **বন্ধ অন্তৰাল** (closed interval)। যদি সোঁমুৰৰ বিন্দুটো বাদ দিয়া তেন্তে ইয়াৰ নাম **সোঁমুক্ত অন্তৰাল** (right open interval) যদি ইয়াৰ বাওঁমূৰৰ বিন্দুটো নধৰা তেন্তে ইয়াৰ নাম **বাওঁমুক্ত অন্তৰাল** (left open interval)। আৰু যদি ইয়াৰ দুয়ো মূৰৰ দুয়োটা বিন্দু বাদ দিয়া তেন্তে ইহঁতৰ মাজৰ আটাইবোৰ বিন্দুৰ সংহতিটোক **মুক্ত** (open) **অন্তৰাল** বোলা হয়।









এইবোৰ কথা বেকাৰেখাৰ ক্ষেত্ৰতো হ'ব।

মেঘালী ঃ ছাৰ, অংকিতাক চাওক, হাতখনতে কিবা আঁকি লেতেৰা কৰিছে!

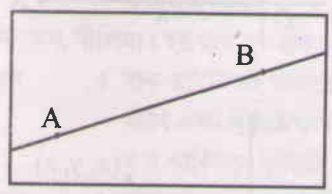
অংকিতা ঃ ছাৰ, মই ৰেখা কিছুমান আঁকিহে চাইছো, আগতে হাতত থকা ৰেখাবোৰৰ ওপৰতে কিছুমান। ছাৰ ইয়াত দেখোন পোন ৰেখা এটাও নাই।

ছাৰ ঃ এৰা। অংকিতাই ঠিক কথাকে ভাবি চাইছে। প্ৰকৃততে ভগবানৰ সৃষ্টিত কৰবাত জানো আমি মানুহে ভবা সৰলৰেখাৰ অস্তিত্ব বিচাৰি পাইছো? আমি জনাত নাই। তাৰোপৰি প্ৰকৃত সৰলৰেখা এটা আমি নিখুঁতভাৱে আঁকিব নোৱাৰো। অৱশ্যে কিছুমান গণিতজ্ঞই উলিওৱা এনে কিছুমান মেচিন আছে যাৰ সহায়ত কিবা এটা নিয়মৰ অধীনত চলাচল কৰা এটা বিন্দুৰ সঞ্চাৰ পথ এটাৱে যথাৰ্থ সৰল ৰেখা এটাৰ উৎপন্ন কৰিব পাৰি। কিন্তু হ'লেও এটা কথা, মানুহৰ সকলো কৰ্মৰে সীমা আছে, আনকি মানুহে সৃষ্টি কৰা মেচিনৰো। গতিকে কোনো মেচিনে এটা অসীমভাৱে বিস্তৃত সৰলৰেখা উৎপাদন কৰাৰ সামৰ্থ্য নাই।

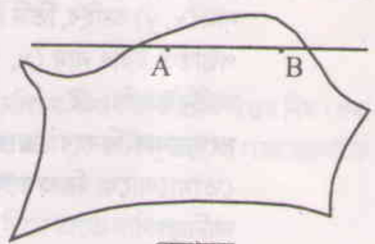
তাৰোপৰি আৰু এটা কথা চোৱা। অংকিতাৰ হাতখন নাইবা হাতৰ তলুৱাখন প্ৰকৃত সমতল নহয়। সমতলতহে সৰলৰেখা সম্ভৱপৰ। তোমালোকে সমতল আৰু বেকাতল দেখি নিশ্চয় চিনিব পৰা হৈছা। উদাহৰণ দিব শিকিবা।

নিপুকণ ঃ ছাৰ! প্ৰকৃত সমতল আছেনে? নে ৰেখাৰ, বিন্দুৰ দৰে ইও এক কল্পনাৰ বস্তুহে।

ছাৰ ঃ সুন্দৰ প্ৰশ্ন। তল বা পৃষ্ঠবোৰো আমাৰ ধাৰণাহে। আমি কল্পনাৰেই সমতলৰ ধাৰণা কৰো। এটা পৃষ্ঠৰ ওপৰৰ প্ৰত্যেক দুটা বিন্দুৰ সংযোগী সৰলৰেখা এটা যদি সম্পূৰ্ণভাৱে পৃষ্ঠৰ ওপৰতেই মিলি যায়, সেই পৃষ্ঠৰ নামেই **সমতল**। অৱশ্যে এনেবোৰ বিকৃতিৰে পৃষ্ঠ বা ৰেখা আদি চিনা বা গাণিতিক কাৰ্যত



সমতল



বেকাতল

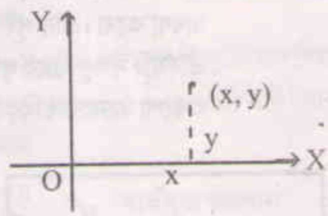
ব্যৱহাৰ কৰাটো সহজ নহয়। সেয়ে এইবোৰৰ প্ৰতিটোৰে চিনাকী আৰু লগতে বিবিধ ধৰ্ম লক্ষণ আদি অধ্যয়ন কৰাৰ সুবিধাৰ বাবে কিছুমান স্বৰ্তসহ গাণিতিক ম'ডেল ব্যৱহাৰ কৰি একোটা সমীকৰণ লোৱা হয়। এইবোৰ তোমালোকে উচ্চগণিত অধ্যয়ন কৰিলে পাবা। প্ৰকৃততে এনে সমীকৰণৰ সহায়তে বিভিন্ন শ্ৰেণীৰ ৰেখা বা তলৰ সংজ্ঞা দিব পাৰি; যেনে, $ax+by+1=0$ আৰ্হিৰ সমীকৰণ একোটা সিদ্ধ কৰা (x, y) বিন্দুবোৰৰ সংহতিয়ে ৰেখা, নাইবা $ax+by+cz+1 = 0$ আৰ্হিৰ সমীকৰণ সিদ্ধ কৰা (x, y, z) বিন্দুবোৰৰ সংহতিয়ে এখন সমতল। সেইদৰে যিকোনো পৃষ্ঠৰ সংজ্ঞাৰ বাবেও জটিল সমীকৰণ লোৱা হয়। এই সমীকৰণবোৰৰ আৰ্হিও আকৌ বিভিন্ন পদ্ধতিত বেলেগ বেলেগ। ওপৰৰ সমীকৰণ দুটাৰ আৰ্হিটো কাৰ্টেজীয় নামৰ বিশেষ স্থানাংক পদ্ধতিত প্ৰকাশ কৰা হৈছে। সেইদৰে একোটা ৰেখাকে বা পৃষ্ঠকে পেৰামেট্ৰিক, পোলাৰ আদি অইন কিছুমান নাম থকা বিভিন্ন স্থানাংক পদ্ধতিতো প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

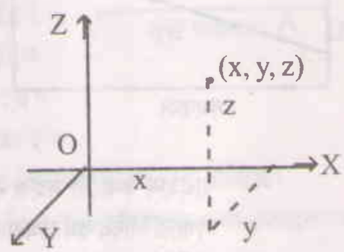
প্ৰবাল ঃ ছাৰ, আমি যিবোৰ সমীকৰণ দেখি আহিছো সেই আটাইবোৰ কোন পদ্ধতিৰ?

ছাৰ ঃ তোমালোকে বিন্দুৰ নাম বা সমীকৰণৰ নাম দিয়া পদ্ধতি মাত্ৰ এটাই পাইছো। সেই আটাইবোৰ কাৰ্টেজীয় পদ্ধতিৰ। এই জ্যামিতিক পদ্ধতিটো ফৰাচী গণিতজ্ঞ ৰিনি ডেকাৰ্ট (Descartes) নামে এজন মহান গণিতজ্ঞৰ আবিষ্কাৰ।

অংকিতা ঃ বিন্দুৰ সংজ্ঞা আছে নে নাই এইবোৰ পদ্ধতিত?

ছাৰ ঃ বিন্দু কাক বোলে তাৰ সংজ্ঞা নাই। কিন্তু বিন্দুৰ চিনাকী নাম প্ৰতিটো পদ্ধতিত আছে। যেনে কাৰ্টেজীয় ২-বিমীয় পদ্ধতিত এটা বিন্দু Pৰ নাম (x, y) আৰ্হিৰ, তিনি বিমীয় পদ্ধতিত ইয়াৰ নাম (x, y, z) আৰ্হিৰ ইত্যাদি। এই x, y, z বাস্তৱ সংখ্যাবোৰ কিদৰে জোখা হয় তোমালোকে নিশ্চয় অলপ জানিছা।





মেঘালী ঃ অকল X আৰু Y অক্ষৰেখা লৈহে জানিছো ছাৰ। কথাবোৰ একেই নেকি?

ছাৰ ঃ সম্পূৰ্ণ একেই। ইয়াত তিনিটা দিশত X, Y, Z তিনিটা অক্ষৰেখা বা পৰস্পৰ লম্ব ৰেখা লোৱা হেতুকে ইয়াক তিনি-বিমীয় (3-dimensional) স্থানাংক পদ্ধতি বোলে। প্ৰকৃততে X, Y, বা Z আদি অক্ষৰেখাবোৰ বাস্তৱ ৰেখাহে (real number line)। ইয়াৰ প্ৰতিটোৰে ওপৰত থকা প্ৰতিটো বিন্দুকেই একোটা বাস্তৱ সংখ্যাৰে বুজাব পাৰি। সেয়ে এই ৰেখা তিনিটাক প্ৰসঙ্গ ৰেখা হিচাপে ধৰিলে এয়ে সুবিধা যে, জগতত এনে কোনো বিন্দু নাই যাক অতি কমেও x, y, z এই তিনিটা বাস্তৱ সংখ্যাৰে বুজাব নোৱাৰি।

যিয়েই নহওক, এখন সমতলত এটা বিন্দু নাইবা ৰেখা বা যিকোনো চিত্ৰ আদিৰ প্ৰতিটো বিন্দুকে বুজাবলৈ যদি x, y দুটা দিশেৰে কমেও দুটা অংকৰ প্ৰয়োজন তাক দুই-বিমীয় চিত্ৰ বোলে। একেদৰে তিনিটা x. y, z

দিশেৰে, অৰ্থাৎ সমতলৰ বাহিৰলৈ গৈ যদি অইন এটা তৃতীয় দিশেৰে যি কোনো বিন্দু, ৰেখা, অইন পৃষ্ঠ নাইবা ঘনচিত্ৰৰ প্ৰতিটো বিন্দুকে বুজাবলগীয়া হয় তেন্তে তাক তিনি-বিমীয় বোলা হয়। এইদৰে গণিতত বহু-বিমীয় বস্তুৰ ধাৰণাও কৰা হৈছে।

নীলিমা ঃ ছাৰ, এক-বিমীয় বস্তুবোৰ কেনে?

ছাৰ ঃ আমি ইয়াত বস্তু মানে জ্যামিতিক চিত্ৰৰ কথাহে কৈছো। বিন্দুৰ স্থানৰ সহায়ত এই চিত্ৰবোৰ বুজোৱা হয়। আকৌ স্থান বা অৱস্থিতি বুজাবলৈ হ'লে আমাক কেতিয়াবা এটা, কেতিয়াবা দুটা বা কেতিয়াবা তিনিটা বা বেছি প্ৰসংগৰ দৰ্কাৰ হয়।

কেবাজনেও একেলগে ঃ ছাৰ, ছাৰ...!

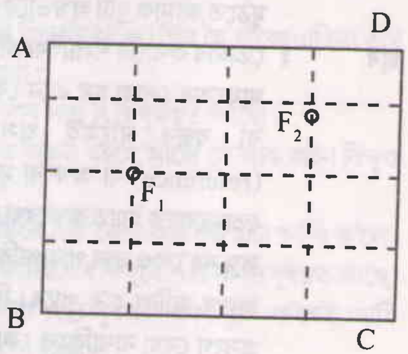
ছাৰ ঃ ৰ'বা ৰ'বা। তোমালোকে কিয় চিঞৰিছা মই জানো। 'প্ৰসংগ' শব্দৰ অৰ্থ বুজা নাই নহয়?

নিপুকণ, নীলিমা ঃ হয় ছাৰ, হয় ছাৰ।

ছাৰ ঃ বাৰু এইটো মই আগতে বুজাও, পিছত অংকিতাৰ প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিম। ধৰা আমি এখন সীমা নথকা সমতলত এটা ফুট বা বিন্দু বহালো। তোমালোকে ক'ব পাৰিবানে ফুটাটো কোন ঠাইত আছে?

ময়ূৰ ঃ (পিছফালৰ পৰা) ছাৰ যি ঠাইত দিয়ে তাতে থাকিব।
(শ্ৰেণীত গিৰ্জ্জনীৰ ৰোল। সকলোৱে হাঁহিব ধৰাত)

ছাৰ ঃ ৰ'বা, নাহাঁহিবা। কথাটো তেনেই সহজ নহয়। ময়ূৰ, তুমি কাষৰ ৰুমটোলৈ গৈ আহা। আমাক কোৱা সেই ৰুমটোত যে চিলিং ফেন দুখন আছে কোনখন কোন ঠাইত আছে? তুমি আহি আমাৰ বোৰ্ডত চিত্ৰ আঁকি সঠিক স্থানটো দেখুৱাবা। দৰ্কাৰ হ'লে তোমাৰ লগত নিপুকণ আৰু কিশোৰকো লৈ যোৱা।
(তিনিওজনে গ'ল। অলপ দেৰি নিৰীক্ষণ কৰি তিনিওজনে আলোচনা কৰিলে। উভতি আহিল)



ছাৰ ঃ বুজি পাইছানে? বাৰু আমাক আঁকি দেখুৱা।

(ময়ূৰে আয়তাকৰ চিলিংখন আঁকিলে। কিন্তু ফেন দুখন কোন স্থানত দিব ভাবি থাকিল। সি আন্দাজতে ফোঁট দুটা দিলে। কিন্তু নিপুকণে সেই ফোঁট দুটা মচি ভালদৰে হিচাপ কৰি বেলেগ ঠাইত সঠিক স্থানত অইন দুটা ফোঁট দিলে।)

ছাৰ ঃ বাৰু কোৱাছোন, কিয় এইদৰে দিলা? কিশোৰ! নিপুকণে দেখুৱা ঠাই দুখনত সঁচাকৈয়ে ফেন দুখন আছেনে?

কিশোৰ ঃ হয় ছাৰ, ঠিকেই আছে।

ছাৰ ঃ কেনেকৈ জানিলা?

কিশোৰ ঃ ছাৰ, ফেন দুখনৰ সঠিক স্থান পাবৰ বাবে আমি চিলিঙৰ এটা চুকত লগ হোৱা বেৰ দুখন আৰু চিলিঙৰ কটাকটি কৰা ৰেখা দুটা লৈছো। এয়া ছাৰ, B চুকত BC আৰু BA ৰেখা দুটাৰ কথা কৈছো। এতিয়া F_1 ফেনখন ABৰ পৰা 4 ফুট আৰু BCৰ পৰা 8 ফুট দূৰত্বত আছে। গতিকে F_1 ফেনৰ স্থানটো (4, 8) বুলিলে সঠিক স্থানটো বিচাৰি পাম। তেনেদৰে F_2 ফেনখনৰ স্থান হ'ব (12, 10)।

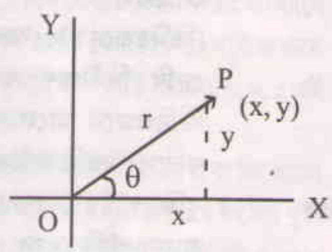
ছাৰ ঃ ধন্যবাদ। বাৰু তোমালোকে স্কেল নোহোৱাকৈ এই ফুটৰ হিচাপটো ক'ত পালা? আন্দাজতে লৈছা নেকি?

নিপুকণ ঃ একেবাৰে আন্দাজ নহয় ছাৰ। চিলিঙত লগোৱা বোৰ্ড একোখন দীঘে পথালি 4 ফুটকৈ। গতিকে তাৰ পৰাই হিচাপ কৰিছো।

ছাৰ ঃ অতি সুন্দৰ। পিছে এটা কথাৰ উত্তৰ দিয়াছোন। চুকত লগ হোৱা ৰেখা দুটা নথকা হ'লে সঠিক স্থান পালাহেঁতেন নে বাৰু?

নিপুকণ ঃ নেপালোহেঁতেন ছাৰ। কিন্তু B চুকটোৰ BC আৰু AB নধৰি অইন যি কোনো এটা চুক লৈ তাত লগ হোৱা ৰেখা দুটাও ল'ব পাৰিলোহেঁতেন। মুঠতে আমাক দুটা লম্বভাৱে কটা সৰলৰেখা লাগিবই।

ছাৰ ঃ তোমাৰ কথাটো শলাগিবলগীয়া। যি ৰেখা বা বস্তুক সাৰথি কৰি জোখ-মাফবোৰ পোৱা হয় এনে ৰেখা বা বস্তুৰ নামেই প্ৰসংগ (reference) বা অক্ষ বা মুল। তোমালোকে ইয়াত অক্ষৰেখা দুটা লম্ব নহ'লেও স্থান পাব পাৰিবা। অলপ জটিল হ'ব পাৰে। কিন্তু প্ৰসংগ ৰেখা নাথাকিলে কোনো

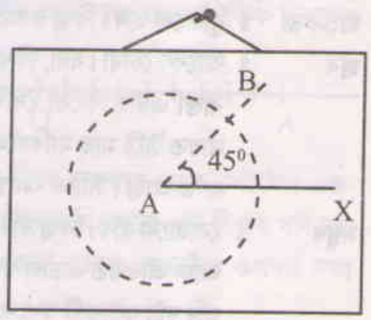


স্থান নিৰূপণ কৰিব নোৱাৰি। যি কোনো দিশত অক্ষৰেখা ল'লেও তুমি স্থান নিৰূপণ কৰিব পাৰিবা। যদিও স্থানাংকৰ মান সলনি হ'ব তথাপিও একেটা স্থানেই নিৰ্দিষ্টকৈ পোৱা যাব। মুঠতে যিবোৰ বিন্দু নিৰূপণ কৰিবলৈ অন্ততঃ দুটা প্ৰসঙ্গৰ প্ৰয়োজন, তাক এই দুটা মাত্ৰাৰ বাবে দুটা সংখ্যা লাগিব। এই প্ৰসংগ অৱশ্যে বেলেগ পদ্ধতিত বেলেগ হ'ব পাৰে। যেনে XOY সমতলত থকা P বিন্দুটোৰ স্থান ঠিক কৰিবলৈ আমি তোমালোকে কৰাৰ দৰে (x, y) বুলিও লিখিব পাৰো, নাইবা Pৰ মাজৰে $\overline{OP}$ ৰেখা এটা টানি OP য়ে OXৰ লগত কৰা θ কোণটো জুখিও Pৰ স্থান (OP, θ) বুলি লিখিলেও একেটা স্থানেই নিৰ্দ্ধাৰিত হ'ব।

এতিয়া অক্ষ বা প্ৰসংগ কিয় লাগে বুজিলানে?

ময়ূৰ ঃ অলপ অলপ বুজিছো ছাৰ।

ছাৰ ঃ হে! কি ক'লা? অলপ অলপহে। বাৰু ৰ'বা! অলপ বেলেগ ধৰণে কওঁ। (পেঞ্চিলেৰে বোৰ্ডত আঁকি) ধৰা আমাৰ বোৰ্ডখনৰ কোনো ফালে সীমা নাই, আৰু বোৰ্ডখন এখন সমান বহল পথাৰ। এই পথাৰখনৰ এঠাইত তুমি ঠিয় হৈ আছা। (A বিন্দুটো আঁকি) এতিয়া তুমি ক'ব পাৰিবানে তুমি কোন ঠাইত আছা?



ময়ূৰ ঃ ক'ব নোৱাৰিম ছাৰ।

ছাৰ ঃ এতিয়া মই যদি এইখিনিত (B বিন্দুটো আঁকি) থিয় হৈ থাকো এতিয়া তুমি ক'ব পাৰিবানে তুমি ক'ত আছা?

ময়ূৰ ঃ ছাৰ ক'ব পাৰিম। মই আপোনাৰ পৰা AB দূৰত্বত আছো।

ছাৰ ঃ বাৰু তোমাৰ পৰা দূৰত্ব ABত অকল মইহে আছো নে আৰু অইন বিন্দুও আছে।

ময়ূৰ ঃ অকল আপুনি নহয় ছাৰ। (ময়ূৰে Aক কেন্দ্ৰ কৰি বৃত্ত এটা আঁকি ক'লে) ছাৰ! এই বৃত্তৰ ওপৰত থকা আটাইবোৰ বিন্দুৱে AB সমান দূৰত্বত আছে।

ছাৰ ঃ গতিকে তুমি অকল মোৰ পৰা AB দূৰত্বত থকা বুলি ক'লেই আমি জানিব পাৰিম নে যে তুমি ক'ত আছা?

ময়ূৰ ঃ নোৱাৰিম ছাৰ।

ছাৰ ঃ গতিকে অইন কিবা এটা আৰু লাগিব। যেনে যদি তুমি AXৰ দৰে (ৰেখাটো আঁকি) ৰেখা এটা লোৱা আৰু যদি AB ৰেখাটোৱে AXৰ লগত কৰা কোণটো জানো যেনে 45^0 তেন্তে তোমাৰ স্থানটো নিৰ্ভুল হ'ব। কাৰণ AB দুৰত্বত আৰু 45^0 ডিগ্ৰী কোণত অইন কোনো বিন্দুৱে থাকিব নোৱাৰে। গতিকে তোমাৰ শুদ্ধ স্থান (AB, 45^0)। এনে পদ্ধতিৰেও আমি এই সীমাহীন বোৰ্ডখনৰ প্ৰতিটো বিন্দুৰে অৱস্থান পাব পাৰো। ইয়াত দুটা সংখ্যাই যথেষ্ট। এই সংখ্যা দুটাক দুটা ক্ষেত্ৰৰ পৰা বাচিছো, যেনে Aৰ পৰা দূৰত্ব আৰু AX লগত কৰা কোণ। গতিকে আমাৰ ইয়াত দূৰত্ব (AB) আৰু কোণ AB য়ে প্ৰসংগ। এতিয়া অলপ বুজিলা নিশ্চয়? নে কি কোৱা অংকিতা?

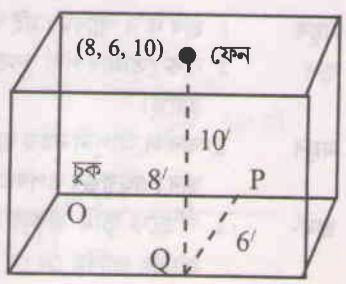
অংকিতা ঃ বুজিছো ছাৰ। কিন্তু কথাবোৰ অলপ বেলেগ বেলেগ লাগিছে।

ছাৰ ঃ আকৌ চোৱা। ধৰা, বিশাল বানপানী। পাৰাপাৰ নাই। গছ ওডাল নাইবা ৰাস্তা এটাও কতো দেখিবলৈ নাই। তুমি, কিশোৰ আৰু নিপনে এখন নাৱত উঠি মাছ মাৰিবলৈ গৈছা। তেতিয়া তোমালোকে ক'ব পাৰিবানে ক'ত আছা? সঠিক অৱস্থান উলিয়াব পাৰিবানে?

ময়ূৰ ঃ নোৱাৰো ছাৰ। কিন্তু যদি এটা ৰাস্তা দেখা পাও অলপ পাৰিম। এটা ৰাস্তা আৰু আঁতৰত এডাল গছ দেখা পালেও অলপ বেছিকৈ গম পাম। কিন্তু যদি দুটা কটাকটি কৰা ৰাস্তা দেখা পাওঁ সঠিকভাৱে পাৰিম।

ছাৰ ঃ এৰা, একদম ঠিক কৈছা। এনে ৰাস্তা বা গছ নাইবা ৰাস্তাৰ লগত কৰা কোণ আৰু ৰাস্তাটোৰ এটা স্থানৰ পৰা দূৰত্ব জানিলে এইবোৰকে প্ৰসংগ বুলি কয়। স্থান নিৰ্দ্ধাৰণ কৰিবলৈ প্ৰসংগ লাগিবই। টেবুল, চকী, বেৰ এইবোৰো প্ৰসংগ হ'ব পাৰে।

মেঘালী ঃ ছাৰ, চন্দ্ৰ সূৰ্য আদিৰ স্থান কিদৰে নিৰূপণ কৰে?

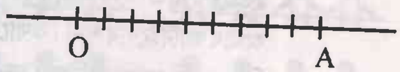


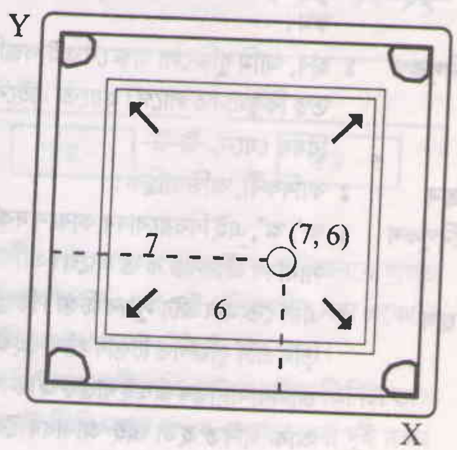
ছাৰ ঃ কথাবোৰ একেই। আগতে কৈছোৱে, এখন সমতলত থকা বস্তুৰ স্থানৰ বাবে দুটা অক্ষৰ প্ৰয়োজন। তেনেদৰে একেখন সমতলতে নাথাকিলে

সমতলখনৰ বাহিৰৰ বিন্দুটো পাবলৈ আমাক আৰু এটা দিশৰ জোখ লাগিব। যেনে চিলিঙত থকা ফেনখনৰ স্থান পাবলৈ মজিয়াৰ দুটা দিশৰ উপৰি মজিয়াখনৰ পৰা কিমান ওপৰলৈ যাব লাগিব তাৰো জোখ লাগিব। অৰ্থাৎ আমাৰ ইয়াত তিনিটা সংখ্যাৰ দৰ্কাৰ যেনে আমি ওপৰত কৈ অহা (x, y, z) বিন্দুটো। কাষৰ চিত্ৰত কোঠালিৰ ফেনখনৰ স্থানাংক (8, 6, 10) য'ত OP = 8 ফুট PQ = 6 ফুট আৰু QF = 10 ফুট। সেইদৰে যিকোনো তিনিটা অক্ষ ধৰি চন্দ্ৰ, সূৰ্য বা যিকোনো নক্ষত্ৰৰো স্থান পাবা। অৱশ্যে অইন ধৰণেও উলিয়াব পাৰিবা। কিন্তু স্থানটো একেই থাকিব।

নীলিমা ঃ ছাৰ, মই যে সুধিছিলো!

ছাৰ ঃ অ', অ', ৰ'বা। মই তোমাৰ প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিবলৈ গৈ বহুদূৰ আঁতৰি আহি পাহৰিবই ধৰিছিলো। তুমি সুধিছিলা এক-বিমীয় (one-dimensional) বস্তুৰ কথা। এক-বিমীয়, দ্বি-বিমীয় আদি বস্তু বা জ্যামিতিক চিত্ৰবোৰ প্ৰকৃততে সিহঁতৰ আকৃতি বা অৱয়বৰ (যেনে— দীঘ, চেপেটা, গোটা) ওপৰতহে নিৰ্ভৰ কৰে। যিটো বস্তুত কেৱল দীঘৰ ধাৰণাহে থাকে সেইবোৰ এক-বিমীয়, যেনে— এটা ৰেখা OA। ইয়াৰ যিকোনো এটা বিন্দুক যদি মূল বিন্দু (O) বা প্ৰসংগ বিন্দু বুলি কোৱা তেন্তে ৰেখাটোৰ ওপৰত থকা প্ৰতিটো বিন্দুৰ স্থান দূৰত্বৰ জোখেৰে মাত্ৰ এটা সংখ্যাৰে বুজাব পৰা যাব। যেনে, Aৰ স্থান 7। কথাটো এনে, ধৰা এটা ৰাস্তাৰে গাড়ী এখন গৈছে। তেন্তে আমি যদি এঠাইৰ পৰা কওঁ গাড়ীখন





৭ মাইলচ আছে, তেন্তে ইয়াৰ স্থান বুজাবলৈ 7ৰ বাহিৰে বেলেগ সংখ্যাৰ দৰ্কাৰ নাই। অকল দীঘৰ ধাৰণাৰে ৰেখাটো এক-বিমীয়। ইয়াত থকা বিন্দুবোৰকো এক-বিমীয় বুলি ক'ব পাৰিবা।

তেনেদৰে এখন সমতলীয় কেৰম বোৰ্ডৰ ওপৰত এটা গুটিৰ স্থান অকল 7 বুলি ক'লে নহয়। আমি আগতে কোৱাৰ দৰে ইয়াক দুটা দিশৰ পৰা অৱস্থান জুখিব লাগিব। গতিকে সমতলীয় (চেপেটা) ক্ষেত্ৰত স্থানাংকত দুটা অংক লাগিব। এনে ক্ষেত্ৰ দুই-বিমীয়। একেদৰে তিনি, চাৰি আদি বিমীয়ৰ কথা আমি ভাবিব পাৰো।

নীলিমা ঃ ছাৰ, শূন্য-বিমীয় (Zero-dimensional) কিবা আছেনে?

ছাৰ ঃ (হাঁহি) এওঁ দেখিছো বেছ বুধিয়ক, দুয়োটা প্ৰশ্নই সূক্ষ্ম বুদ্ধিৰ। এটা ৰেখাত আলোচনা কৰিবলগীয়া কথাবোৰ এক-বিমীয়। যদি এই বিন্দুবোৰ থকা ক্ষেত্ৰখন এটা ৰেখা, বা এখন সমতল নাইবা অইন নহৈ মাত্ৰ এটা বিন্দু হয় তেন্তে ইয়াত থকা বিন্দুটোৰ কোনো দীঘ, প্ৰস্থ আদি অৱয়ব নাথাকিব। অৰ্থাৎ আটাইবোৰ শূন্য। কথাবোৰ এনে। ধৰা এটা ৰেখাত থকা আটাইবোৰ বিন্দু আহি মাত্ৰ মূলবিন্দু Oত থুপ খালে, অৰ্থাৎ ৰেখাটো কোচমোচ খাই এটা বিন্দুত মিলিত হ'ল। তেতিয়া এই আটাইবোৰ বিন্দুৰ জগতখন মাত্ৰ এটা বিন্দুই হ'ব। ইয়াত মূল বিন্দুৰ পৰা যিকোনো বিন্দুৰ দূৰত্ব নাইবা অইন যিকোনো ধৰণৰ জোখমাপ শূন্য হ'ব। আমি এই এটা বিন্দুৰ ক্ষেত্ৰখনক শূন্য-বিমীয় বুলি কম, আৰু তাত থকা বিন্দুবোৰকো শূন্য-বিমীয় বুলি কম।

নিপুকণ ঃ ছাৰ, আমি বুজিলো বাৰু যে এই পদ্ধতিবোৰ জ্যামিতিক চিত্ৰ বা গাণিতিক তত্ব কিছুমানত লাগে। হয়তো এইবোৰক য'ত গণিতৰ তত্ব প্ৰয়োগ কৰা বিষয় যেনে, -উ-উ-।

ছাৰ ঃ কাৰিকৰী, অভিযান্ত্ৰিক।

নিপুকণ ঃ অ', অ', এই বিষয়বোৰৰ কাৰণে দৰ্কাৰ হয়। ছাৰ, এইবোৰ আমাক নাইবা সাধাৰণ জীৱনত ক'ত লাগে?

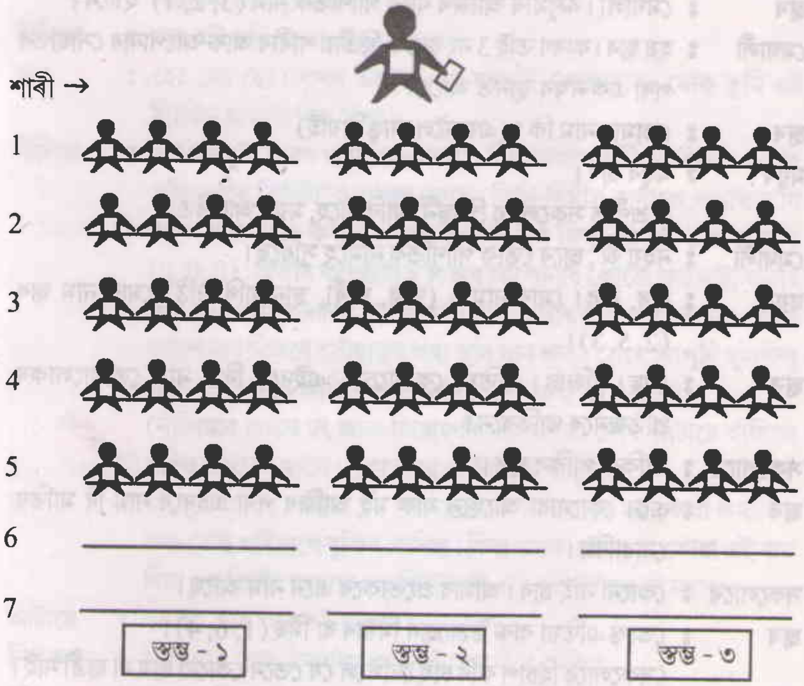
ছাৰ ঃ এয়া তোমাৰ এটা সুন্দৰ চিন্তা। কিন্তু তথাপিও মই কম যে এই প্ৰশ্নটোৰে তুমি এটা যুক্তিগত চিন্তাৰ আঁত হেৰুওবাটো প্ৰকাশ পাইছে। তোমালোকে জানিবা গণিতৰ জন্মই বাস্তৱ জীৱনৰ প্ৰয়োজনীয়তাৰ আধাৰত গঢ় লোৱা আৰু গণিত হ'ল এই আধাৰৰ বৈজ্ঞানিক কৰ্ম। গণিত আৰু বিজ্ঞানৰ

খাতিৰতে গণিতৰ বিকাশ। বাৰু আমি স্থানাংক পদ্ধতিৰ সৰল ব্যৱহাৰ দুটামানৰ উদাহৰণ দিলে ভালদৰে এইবোৰৰ ব্যৱহাৰৰ দিশ বুজি পাবা।

তোমালোকৰ শ্ৰেণীটোত কিমান ছাত্ৰ-ছাত্ৰী আছে?

আটায়ে (গণি) ঃ ছাৰ 48 জন।

ছাৰ ঃ তোমালোকে জানা যে মই গণিত অলপ জানিলেও মোৰ মগজটোত এনে কোনো পৰম দৈবিক শক্তি সোমাই নাই যে মই আজি প্ৰথম তোমলোকৰ শ্ৰেণীত সোমায়েই এই আটাইকেইজন ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ নাম মনত



ৰাখিম। কিন্তু মোক শ্ৰেণীত থাকোতে তোমালোক প্ৰতিজনৰে লগত কিবা নহয় কিবা সম্পৰ্কৰ দৰ্কাৰ হয়। ধৰা, মই প্ৰতিজনকে নাম একোটা দি মাতিব লাগে যাতে প্ৰতিজনে তৎক্ষণাৎ সঁহাৰি দিব পাৰা।

তোমালোক ক্লাছৰ ভিতৰত শাৰীপাতি বেঞ্চত বহিছা তিনিটা ভাগ বা স্তম্ভত। যদি এজন ছাত্ৰই তিনি নম্বৰ স্তম্ভৰ, প্ৰথমৰ পৰা দুই নম্বৰ

শাৰীৰ এক নম্বৰ স্থানত বহি আছে মই তেওঁৰ নাম দিম (3, 2, 1)। শাৰীৰ নম্বৰ বা স্থানৰ নম্বৰবোৰ মোৰ পৰা আৰু মোৰ সোঁহাতৰ পৰাহে গণিবা। নামটো (স্তম্ভ, শাৰী, স্থান) এই অনুক্ৰমতহে থাকিব অৰ্থাৎ প্ৰথম স্থানাংকত স্তম্ভ, দ্বিতীয় স্থানাংকত শাৰী আৰু তৃতীয় স্থানাংকত মোৰ সোঁহাতৰ পৰা গণিলে কিমান স্থান হয় সেইটো থাকিব। এতিয়া কোৱাচোন আজিৰ বাবে (3, 2, 1) নামটো কাৰ?

ৰুণুমী : (ভয়ে ভয়ে ঠিয় হৈ) ময়ে নেকি ছাৰ!

ছাৰ : মেঘালী! ৰুণুমীৰ আজিৰ বাবে গাণিতিক নাম (3, 2, 1) হয়নে?

মেঘালী : হয় ছাৰ। কাৰণ তাই 3 নং স্তম্ভৰ, দ্বিতীয় শাৰীৰ আৰু আপোনাৰ সোঁহাতৰ পৰা এক নম্বৰ স্থানত আছে।

ছাৰ : তোমাৰ নাম কি? (এজনলৈ আঙুলিয়াই)

ময়ূৰ : ময়ূৰ ছাৰ।

(শ্ৰেণীত সকলোৰে গিৰ্জনী মাৰি হাঁহে, ময়ূৰ আচৰিত)

মেঘালী : নহয় অ', ছাৰে তোক গাণিতিক নামহে সুধিছে।

ময়ূৰ : ছাৰ, ৰ'ব! মোৰ নাম.... (স্তম্ভ, শাৰী, স্থান গণি উঠি) মোৰ নাম ছাৰ (2, 5, 3)।

ছাৰ : বেছ! বুজিছা। এতিয়া কোৱাচোন, এইদৰে দিয়া নাম তোমালোকৰ প্ৰতিজনৰে থাকিবনে?

সকলোৰে : থাকিব, থাকিব ছাৰ।

ছাৰ : এনে কোনোবা আছেনে যাক মই আজিৰ পৰা এইদৰে নাম দি মাতিব নোৱাৰিম।

সকলোৰে : কোনো নাই ছাৰ। আমাৰ প্ৰত্যেকৰে এনে নাম আছে।

ছাৰ : তেন্তে এতিয়া বাৰু উঠাছোন মিষ্টাৰ বা মিছ (1, 6, 4)।

(সকলোৰে হিচাপ কৰি চাই দেখিলে যে তেনে কোনো ছাত্ৰ বা ছাত্ৰী নাই। কোনোৰে নুঠিলে)

অংকিতা : ছাৰ (1, 6, 4) নামৰ কোনো ইয়াত নাই। কাৰণ 6 নং বেঞ্চ খালী।

ছাৰ : গতিকে কি বুজিলা? তোমালোকৰ প্ৰতিজনকে আমি এনে তিনিটা সংখ্যাৰ (a, b, c)ৰ দৰে নাম একোটাৰে জড়িত কৰিব পাৰো। অৱশ্যে বিপৰীতটো সঁচা নহয়, অৰ্থাৎ যিকোনো তিনিটা সংখ্যাৰ এটা নাম লিখিলেই তাৰ অনুৰূপে এজন মানুহ নাথাকিবও পাৰে।

নীলিমা : ছাৰ আপোনাৰ নাম কি?

ছাৰ : এওক দেখিছো মই কোনোপধ্যেই নোৱাৰিছো। ধন্য, তোমাৰ গানিতিক চিন্তাৰ ধৰণ। তুমিয়েই কোৱাচোন মোৰ নাম কি হ'ব?

নীলিমা : ছাৰ, মই এটা ক'ব পাৰো। পিছে যেনিবা ভুল হয়, নাইবা আপোনাৰ খং উঠে!

ছাৰ : মোৰ খঙবোৰ তোমালোকৰ ভুল হোৱাৰ কাৰণবোৰৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰে। কিন্তু তোমাৰ বুদ্ধিমত্তা প্ৰশ্নবোৰৰ বাবেই মোৰ খং উঠাৰ কোনো সম্ভাৱনা নাই বুলি ধৰি ল'বা।

নীলিমা : ছাৰ, মই যদি $(0, 0, 0)$ বুলি কওঁ?

ছাৰ : হেঃ হেঃ হেঃ। সুন্দৰ চিন্তা। পিছে বহলাই কোৱাচোন। মোক তুমি এই নিঃকিন নামটো কিয় দিলা?

নীলিমা : ছাৰ মই দুটা কাৰণ ভাবিছো। আপনি দিয়া নামবোৰ তিনি-বিমীয়, অৰ্থাৎ প্ৰতিজনৰে তিনিটাকৈ সংখ্যা আছে। তিনি-বিমীয় স্থানাংক পদ্ধতিত যি স্থানৰ পৰা গণনা কৰা হয় সেই বিন্দুটো মূল বিন্দু ; অৰ্থাৎ তাৰ স্থানাংক $(0, 0, 0)$। দ্বিতীয় কাৰণটো হ'ল ছাৰ আপোনাৰ কোনো স্তম্ভ নাই, অৰ্থাৎ স্তম্ভ শূন্য। আপোনাৰ কোনো শাৰী নাই, অৰ্থাৎ শাৰীৰ নম্বৰ শূন্য। আৰু আপোনাৰ নিজৰে সোঁহাতৰ পৰা স্থান মান শূন্য। সেয়ে আপুনি মূলবিন্দু আৰু আপোনাৰ আজিৰ পৰা আমি দিয়া নাম হ'ব $(0, 0, 0)$।

(নীলিমাৰ কথাৰ ঢং আৰু বিশ্লেষণৰ পাৰদৰ্শিতা দেখি আটায়ে হাঁহিলে যদিও তম্ভকো খালে। সকলোৱে তাইক বাহ্ বাহ্ দিলে)

ছাৰ : মই খুব আনন্দ পাইছো যে তোমালোকে সকলোৱে মই কোৱা কথবোৰ কম-বেছি পৰিমাণে বুজিব পাৰিছা। কিন্তু মোক এটা কথা কোৱা এই নাম দিয়া পদ্ধতিটো স্থানাংক পদ্ধতিটোৰেই এটা প্ৰয়োগ হয় নে নহয়?

আটায়ে : হয় হয়, ছাৰ। সুন্দৰ উদাহৰণ।

নিপুকণ : ছাৰ, এনে ভাল উদাহৰণ আৰু দুটামান ক'ব নেকি?

ছাৰ : অকল দুটা নহয়, অনেক ক'ব পাৰো। আনকি স্থানাংক পদ্ধতি প্ৰয়োগ কৰি আমি অনেক যাদুখেলো খেলিব পাৰিম। পিছে আজি আমাৰ সময় যথেষ্ট হ'ল। মই আশা কৰিছো তোমালোকে নিজেও ঘৰত গৈ এনে ভাল উদাহৰণ কেইটামান আৱিস্কাৰ কৰিবলৈ চেষ্টা কৰিবা। মই কাইলৈ আকৌ আহিম আৰু আজিৰ বাকীৰোৱা কথাখিনি বিতংকৈ পাতিম।

আটায়ে : হ'ব ছাৰ। ধন্যবাদ ছাৰ।

* * * * * * *

নীলিমা : ছাৰ আপোনাৰ নাম কি?

ছাৰ : এওক দেখিছো মই কোনোপধ্যেই নোৱাৰিছো। ধন্য, তোমাৰ গাণিতিক চিন্তাৰ ধৰণ। তুমিয়েই কোৱাচোন মোৰ নাম কি হ'ব?

নীলিমা : ছাৰ, মই এটা ক'ব পাৰো। পিছে যেনিবা ভুল হয়, নাইবা আপোনাৰ খং উঠে!

ছাৰ : মোৰ খঙবোৰ তোমালোকৰ ভুল হোৱাৰ কাৰণবোৰৰ ওপৰত নির্ভৰ কৰে। কিন্তু তোমাৰ বুদ্ধিমত্তা প্ৰশ্নবোৰৰ বাবেই মোৰ খং উঠাৰ কোনো সম্ভাৱনা নাই বুলি ধৰি ল'বা।

নীলিমা : ছাৰ, মই যদি $(0, 0, 0)$ বুলি কওঁ?

ছাৰ : হেঃ হেঃ হেঃ। সুন্দৰ চিন্তা। পিছে বহলাই কোৱাচোন। মোক তুমি এই নিঃকিন নামটো কিয় দিলা?

নীলিমা : ছাৰ মই দুটা কাৰণ ভাবিছো। আপনি দিয়া নামবোৰ তিনি-বিমীয়, অর্থাৎ প্ৰতিজনৰে তিনিটাকৈ সংখ্যা আছে। তিনি-বিমীয় স্থানাংক পদ্ধতিত যি স্থানৰ পৰা গণনা কৰা হয় সেই বিন্দুটো মূল বিন্দু ; অৰ্থাৎ তাৰ স্থানাংক $(0, 0, 0)$। দ্বিতীয় কাৰণটো হ'ল ছাৰ আপোনাৰ কোনো স্তম্ভ নাই, অর্থাৎ স্তম্ভ শূন্য। আপোনাৰ কোনো শাৰী নাই, অর্থাৎ শাৰীৰ নম্বৰ শূন্য। আৰু আপোনাৰ নিজৰে সোঁহাতৰ পৰা স্থান মান শূন্য। সেয়ে আপুনি মূলবিন্দু আৰু আপোনাৰ আজিৰ পৰা আমি দিয়া নাম হ'ব $(0, 0, 0)$।

(নীলিমাৰ কথাৰ ঢং আৰু বিশ্লেষণৰ পাৰদর্শিতা দেখি আটায়ে হাঁহিলে যদিও তম্ভকো খালে। সকলোৱে তাইক বাহ্ বাহ্ দিলে)

ছাৰ : মই খুব আনন্দ পাইছো যে তোমালোকে সকলোৱে মই কোৱা কথবোৰ কম-বেছি পৰিমাণে বুজিব পাৰিছা। কিন্তু মোক এটা কথা কোৱা এই নাম দিয়া পদ্ধতিটো স্থানাংক পদ্ধতিটোৰেই এটা প্ৰয়োগ হয় নে নহয়?

আটায়ে : হয় হয়, ছাৰ। সুন্দৰ উদাহৰণ।

নিপুকণ : ছাৰ, এনে ভাল উদাহৰণ আৰু দুটামান ক'ব নেকি?

ছাৰ : অকল দুটা নহয়, অনেক ক'ব পাৰো। আনকি স্থানাংক পদ্ধতি প্ৰয়োগ কৰি আমি অনেক যাদুখেলো খেলিব পাৰিম। পিছে আজি আমাৰ সময় যথেষ্ট হ'ল। মই আশা কৰিছো তোমালোকে নিজেও ঘৰত গৈ এনে ভাল উদাহৰণ কেইটামান আৱিস্কাৰ কৰিবলৈ চেষ্টা কৰিবা। মই কাইলৈ আকৌ আহিম আৰু আজিৰ বাকীৰোৱা কথাখিনি বিতংকৈ পাতিম।

আটায়ে : হ'ব ছাৰ। ধন্যবাদ ছাৰ।

* * * * * * *

দ্বিতীয় দিন

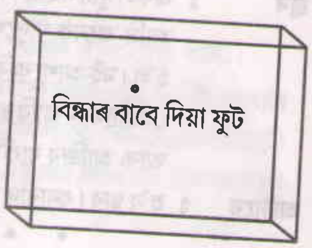
বিমা, যাদু আৰু ৰ'কেট

।। পিছদিনা। দহ বজাৰ লগে লগে নন্দন প্ৰতীম ছাৰ আকৌ শ্ৰেণীত সোমাল। আমাৰ মনত আছে যে যোৱা শ্ৰেণীত ছাৰে ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলক বিন্দুৰ অৱস্থানৰ ওপৰত ভিত্তি কৰি স্থানাংক পদ্ধতিৰ লগতে বিমাৰ ধাৰণা মনোৰম গল্পৰ মাজেদি ব্যাখ্যা কৰিছিল। আজিও ছাৰে এই পদ্ধতিৰ এটি সৰল বুজ দিয়াৰ উদ্দেশ্যে এইবোৰৰ প্ৰয়োগৰ দিশ ব্যাখ্যা কৰিব বুলি হাতত কিবাকিবি বস্তু লৈ শ্ৰেণীত সোমাল।।

ছাৰ ঃ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীহঁত! যোৱা কালিৰ দৰে আজি মই মাত্ৰ দুটা বা তিনিটা উদাহৰণ প্ৰথমে কম। প্ৰকৃততে সাধাৰণ জীৱনৰ প্ৰতি ক্ষেত্ৰতে এনে স্থানাংক পদ্ধতিৰ প্ৰয়োজন হ'ব পাৰে। ঘৰুৱা কাম, বনুৱা, মিস্ত্ৰি, বাঢ়ৈ, অভিযন্তা আদি সকলোৰে ক্ষেত্ৰতেই। মই এটা সাধাৰণ উদাহৰণ দিওঁ।

মোৰ পিছফালৰ বেৰখন অতি ডাঠ, প্ৰায় ৮ ইঞ্চি। ইয়াৰে এটা ঠাইত বেৰখনৰ দুয়োফালৰ পৰা দুটা ফুটা কাটিব লগে যাতে ফুটা দুয়োটা মিলি এটা হয় আৰু আমি তাৰ মাজেৰে এডাল পাইপ ভৰাই এইটো ৰুমৰ পৰা সিটো ৰুমলৈ পাইপডাল পঠাব পাৰো। এয়া মই মোৰ মূৰৰ ওপৰত এইখিনি ঠাইত চিন এটা দিলো। তোমালোকৰ দুজন আহাচোন!

(ৰুণুমী আৰু মেঘালী আহিম বুলি ঠিয় হৈও আকৌ বহি পৰিল। কোনো নুঠা দেখি ছাৰে ক'লে।)



ছাৰ ঃ মিঃ (2, 4, 3) আৰু মিছ (3, 2, 5) আহা।

(নামমতে ময়ূৰ আৰু মেঘালী আহে)

এতিয়া, তোমালোকে মই এই চিন দিয়া ঠাইত দুয়োপিনৰ পৰা দুটা ফুটা কিদৰে কৰিবা কোৱা।

ময়ূৰ : ছাৰ সোঁহাতৰ বেৰখনৰ ঠিয় চুকটোৰ ৰেখাটোক এটা অক্ষ আৰু মজিয়াত লাগি থকা পথালি চুকটোৰ লম্ব ৰেখাটোক অইন এটা অক্ষ ধৰি আপোনাৰ বিন্দুটোৰ স্থানটো প্ৰথমে ঠিক কৰি লম।

মেঘালী : ছাৰ, এতিয়া মই বুজিছো। আমি এতিয়া সেইটো কৰ্মলৈ গৈ সঠিক একে অক্ষৰেখা দুটা ব্যৱহাৰ কৰি একে স্থানাংকৰে বেৰখনৰ উল্টাফালে এটা বিন্দু দিম।

ছাৰ : ভেৰি গুড্। এতিয়া এই দুয়োটা বিন্দুৰে একেটা স্থানকে দিব। এফালৰ পৰা যদি ময়ূৰে বেৰখনত বিন্ধাটো কৰে আৰু উল্টাফালৰ পৰা যদি মেঘালীয়ে বিন্ধাটো কৰে, তেন্তে দুয়োটা বিন্ধাই একেটা ৰেখাতে লগ হ'ব আৰু পাইপডাল সুন্দৰকৈ পাৰ হ'ব। আটায়ে বুজিলানে?

আটায়ে : বুজি পাইছো ছাৰ।

নিপন : ছাৰ, এইটো দুই-বিমীয়ৰ এটা সুন্দৰ উদাহৰণ।

ছাৰ : বাৰু চাবা। মই এতিয়া তিনি-বিমীয় স্থানাংক পদ্ধতিৰে এটা গণিতৰ যাদু দেকুৱাম।

মোৰ সন্মুখৰ মেজখনত তোমালোকৰ হাতত থকা কিতাপকেইখন থৈ যোৱা। দহ-পোন্ধৰখনমান থ'লেই হ'ব।

(ছাত্ৰ-ছাত্ৰীহঁতে কিতাপবোৰ থ'লে)

ৰুণুমী : আমি থৈছো ছাৰ, এতিয়া কি কৰিম?

ছাৰ : তুমি ইয়াৰ পৰা যিকোনো এখন কিতাপ বাচি লৈ যোৱা।

(ৰুণুমীয়ে এখন বাচি ল'ব আৰু লৈ যাব)

— কিতাপখনৰ যিকোনো এটা পৃষ্ঠাৰ প্ৰথম নটা শাৰীৰ পৰা যি কোনো এটা শাৰী বাচি লোৱা।

— তাৰ পৰা এটা শব্দ মনত ৰাখা। মোক এইবোৰ একো নক'বা।

(ৰুণুমীয়ে শব্দ এটা বাচি মনত ৰাখিব)

ছাৰ : যাদুটো হ'ল তুমি কি শব্দ লৈছা মই ক'ব পাৰিম, যদি তুমি মই কোৱামতে কৰা।

— তুমি এতিয়া কাগজ-পেঞ্চিল লোৱা।

— শব্দটো কোন পৃষ্ঠাত আছে সেই পৃষ্ঠাৰ নম্বৰ (P) কি লিখা।

(ৰুণুমীয়ে লিখিব)

— শব্দটোৰ শাৰীৰ নম্বৰটো লিখা। ধৰা (R)।

— শব্দটোৰ শাৰীৰ বাওঁহাতৰ পৰা কোন স্থানত আছে তাকো লিখা। ধৰা এই সংখ্যাটো W।

এইবোৰ মই নাজানো বা দেখা নাই, বা কোনেও মোক কোৱা নাই। নহয়নে?

আটায়ে ঃ হয় ছাৰ।

ছাৰ ঃ এতিয়া তুমি মই কোৱা ধৰণে কৰি যাবা।

— পৃষ্ঠাৰ সংখ্যাটোক 10 ৰে পূৰণ কৰা।

— 13 যোগ দিয়া।

— তাৰ লগত শাৰীৰ সংখ্যাটো যোগ দিয়া।

— আকৌ 12 যোগ দিয়া। দিলা যদি ফলটোক 10 ৰে পূৰণ কৰা।

— শেষত ইয়াৰ লগত শব্দৰ স্থানটো যোগ দিয়া।

— এতিয়া হ'ল যদি যোগফলটো মোক কোৱা। লগে লগে শব্দটো মনে মনে লগৰ বন্ধবোৰক দেখুৱাই লৈ কিতাপখন জপাই মোক দি যোৱা।

(ৰুণুমীয়ে ছাৰে কোৱামতে কৰি কিতাপ জপাই আনি ছাৰক দিলে। লগে লগে ছাৰে মনতে কিবা এটা হিচাপ কৰি শব্দটো উলিয়ালে আৰু বোৰ্ডত ডাঙৰকৈ লিখি দিলে 'দ্বিঘাত'। ল'ৰা-ছোৱালীহঁত অবাক হ'ল।)

আটায়ে একেলগে ঃ ছাৰ আচৰিত কথা। আপুনি এইটো কিদৰে উলিয়ালে আমাক কিন্তু কৈ দিয়ক।

নিপুকণ ঃ ছাৰ, আমি কিন্তু নক'লে নেৰিছো।

ছাৰ (হাঁহি) ঃ হ'ব হ'ব। কও বাৰু। ইয়াতো যিকোনো এখন কিতাপ বা আলোচনী আদিৰ শব্দবোৰৰ স্থানমান নিৰূপণ কৰিবলৈ প্ৰয়োগ কৰা হৈছে এক স্থানাংক পদ্ধতি। অৱশ্যে তাৰ লগত অইন গাণিতিক জ্ঞান কৌশল প্ৰয়োগ কৰা হৈছে। আমি কিদৰে উলিয়াব পাৰিলো চোৱা —

ধৰা পৃষ্ঠা P, শাৰী R আৰু শব্দৰ স্থান (বাওঁহাতৰ পৰা) W।

ৰুণুমীয়ে মই কোৱামতে এইদৰে কৰিছিল—

$$(P \times 10 + 13 + R + 12) \times 10 + W$$

পৃষ্ঠা	শাৰী	স্থান
P	R	W

ইয়াৰ অৰ্থ হ'ল (100P + 10R + W) + 250
বন্ধনীৰ সংখ্যাটো অংকৰে লিখিলে হ'ব—

PRW (কাৰণ 245ৰ অৰ্থ 2 X 100 + 4 X 10 + 5)

গতিকে ৰুণুমীৰ ফলটোৰ পৰা মই 250 বাদ দিলে PRW ওলাব।

ৰুণুমীয়ে কোৱা সংখ্যাটো 1146। মই 250 বাদ দিয়াত ওলাল 896। গতিকে PRW = 896, অৰ্থাৎ 8 পৃষ্ঠাৰ 9 নং শাৰীৰ 6 নং ঘৰৰ শব্দটোহে ৰুণুমীয়ে বচা শব্দ। কিতাপ খুলি মই এই শব্দটো তোমালোকক উলিয়াই দেখুৱালো। শব্দটো হ'ল 'দ্বিঘাত'।

এইদৰে তোমালোকে নিজেও যাদু কৰি অইনক দেখুৱাই ৰং চাবা।

নিপুকণ ঃ আমি কৰি চাম ছাৰ। বাৰু ছাৰ, আমি এক-বিমীয়, দুই-বিমীয়, তিনি বিমীয় আদি পদ্ধতিৰ বিষয়ে অলপ বুজিলো। চাৰি-বিমীয় বা তাতকৈ বেছি বিমীয় পদ্ধতিবোৰৰ উদাহৰণবোৰ বাৰু কেনে? এনে পদ্ধতিৰ জানো ক'ৰবাত প্ৰয়োজন আছে?

ছাৰ ঃ ভাল প্ৰশ্ন। গাণিতিক পদ্ধতি বা বিধিবোৰ কোনো ক্ষেত্ৰতে এটা বা দুটা ক্ষেত্ৰৰ ওপৰত ভিত্তি কৰি ৰচনা কৰা নহয়। মাত্ৰ এটা, দুটা বা সীমিত সংখ্যক ক্ষেত্ৰৰ ভিত্তিত প্ৰয়োগ কৰা পদ্ধতিবোৰে বিভ্ৰান্তিৰ সৃষ্টি কৰিব পাৰে যদিহে বান্ধি দিয়া সীমাটো উল্লেখ কৰা নহয়। এই বিষয়ে আমি পিছত আলোচনা কৰিলে ভাল হ'ব। এতিয়া আমি তোমাৰ কথালৈ আহো। মনত ৰাখিবা যে যি জ্যামিতিক চিত্ৰৰ (যেনে বিন্দু, ৰেখা, পিঠি, বহুফলক আদিৰ) বিন্দুবোৰক মাত্ৰ এটা মাত্ৰাৰে বুজাব পাৰি সেইবোৰক এক-বিমীয় বোলে। যেনে এটা সৰলৰেখাত থকা বিন্দুবোৰ। মাত্ৰা বুলিলে দূৰত্ব, দিশ, স্থান আদি যি কোনো হ'ব পাৰে। অকল এটা বিন্দু নাইবা কিছুমান গণিব পৰা বিন্দুৰ চিত্ৰ এটাৰ বিমা শূন্য। তেনেদৰে দুটা মাত্ৰাৰে বুজাব পৰাবোৰক দুই-বিমীয় বোলে। যেনে সমতলত আঁকা এটা ৰেখাৰ বিন্দুৰ স্থান (x, y)। তিনিটা মাত্ৰাৰে বুজাব পৰা বিন্দুৰ চিত্ৰবোৰক তিনি-বিমীয় বোলে। যেনে মহাকাশত থকা প্ৰতিটো ঘন। ইহঁতৰ প্ৰতিটো বিন্দুৰে অৱস্থান (x, y, z)। একেদৰে চাৰি-বিমীয়, পাঁচ-বিমীয় বা যিকোনো n-বিমীয় চিত্ৰবোৰৰ সংজ্ঞা দিয়াৰ পদ্ধতি আগবাঢ়িব। অৱশ্যে উচ্চ-বিমীয় পদ্ধতিৰ উদাহৰণবোৰৰ বাবে বাস্তৱ জগতৰ আৰ্হিৰে চিন্তা কৰিলে আমি বুজি নাপাম। সহজতে বুজাবলৈ সংহতিৰ আশ্ৰয় ল'ব লাগে। তোমালোকে সংহতিৰ

কথা জানাই। ইয়াৰ সহায়ত ওপৰৰ বিমাৰ কেইটামান উদাহৰণ এইদৰে দিব পাৰো—

এক-বিমীয় ঃ বাস্তৱ সংখ্যাৰ ৰেখাডাল থকা বিন্দুবোৰ অৰ্থাৎ R,

দ্বি-বিমীয় ঃ সমতল = {(x, y) | x ∈X অক্ষ, y ∈Y অক্ষ।}

তিনি-বিমীয় ঃ ৰিক্ষ (অন্তৰিক্ষ space) - {(x, y, z) | x ∈X, y ∈Y, z ∈Z}

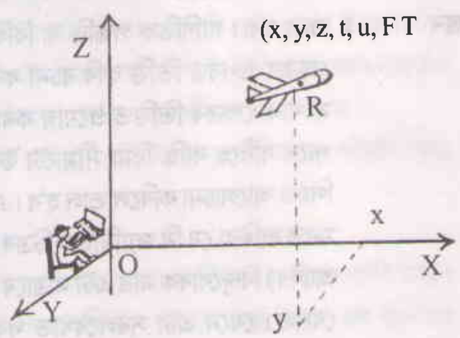
অৰ্থাৎ এটা ক্ৰমত থকা x, y, z প্ৰতিটো দিশৰ পৰা বাচি পোৱা আটাইবোৰ বিন্দু (x, y, z)।

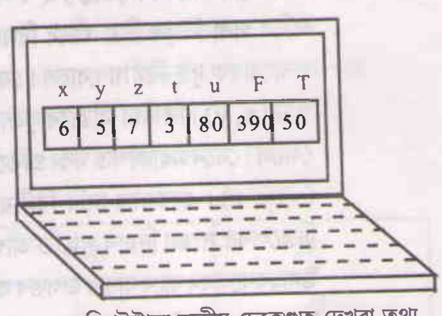
এতিয়া আমি ইয়াৰ সহায়ত উচ্চ-বিমীয় পদ্ধতিৰ এটা উদাহৰণ দিও। তোমালোকে সহজতে বুজি পাবা। কোৱাচোন বাৰু, কিমান বিমীয় স্থানাংক পদ্ধতিৰ উদাহৰণ লাগে।

নীলিমা ঃ ছাৰ, সাত-বিমীয়ৰ উদাহৰণ এটা কওক।

ছাৰ ঃ হ'ব বাৰু।

ধৰা মই এজন মহাকাশ বিজ্ঞানী এই O বিন্দুটোত (ছাৰে কাষত দেখুৱা ধৰণে চিত্ৰ এখন বোৰ্ডত আঁকি উঠি কৈ যায়) যেনিব আমাৰ মহাকাশ গৱেষণা কৰা নিয়ন্ত্ৰণ কক্ষ আৰু মই এই O বিন্দুতে কম্পিউটাৰৰ পৰ্দাৰ আগত বহি আছো। আমাৰ নিয়ন্ত্ৰণ কক্ষৰ পৰা ধৰা আমি এখন মহাকাশ যান পঠাইছো ৰকেট





কম্পিউটাৰে তৃতীয় চেকেণ্ডত দেখুৱা তথ্য

এটাৰে (R)। এতিয়া আমি ধৰা উৰণীয়া ৰকেটটোৰ বিভিন্ন তথ্য পাতি প্ৰতি মুহূৰ্ততে ৰেকৰ্ড কৰি যাব লাগে। এই ৰেকৰ্ড কৰিবলগীয়া তথ্যসমূহ আমি সাতটা বিভিন্ন ধৰণৰ ৰাশিৰে বুজাম। যেনে— যিকোনো মুহূৰ্তত ৰকেট যানখনৰ —

(i) অৱস্থান = (x, y, z), [x, y, z ৰ মানবোৰ মিটাৰত]
(ii) সেই অৱস্থানৰ মুহূৰ্তটোৰ সময় = t (ছেকেণ্ড)
(iii) সেই অৱস্থানৰ মুহূৰ্তত ৰকেটৰ বেগ = u (মিটাৰ/ ছেকেণ্ড)
(iv) সেই অৱস্থানৰ মুহূৰ্তত ৰকেটত থকা ইন্ধনৰ পৰিমাণ = F (কিল'গ্ৰাম)
(v) সেই অৱস্থানৰ মুহূৰ্তত ইঞ্জিনৰ উত্তাপ = T (ডিগ্ৰী)

এই সাতটা চলক x, y, z, t, u, F আৰু Tৰ মানবেৰেৰে আমি ৰকেটযানখনৰ খবৰ প্ৰতি মুহূৰ্ততে পাম। এই সাতোটা তথ্য কম্পিউটাৰৰ পৰ্দ্দাত ওলাই থাকিব। আমি সেইবোৰ প্ৰতি 10 চেকেণ্ডৰ মূৰে মূৰে ছপা কৰি উলিয়াইছো।

x	y	z	t	u	F	T
0	0	0	0	0	400	34
1	2	3	1	60	400	39
3	5	6	2	70	398	45
6	5	7	3	80	390	50
6	6	9	4	90	389	70
7	8	10	5	100	388	90
8	9 ,	40	6	150	387	100
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-

এতিয়া তোমালোকে মন কৰিব পাৰিছা নে যে প্ৰতি ছেকেণ্ডত কম্পিউটাৰে দেখুৱা তথ্যবোৰ এটা ক্ৰমিক ৰূপত আছে। যেনে— (6, 5, 7, 3, 80, 390, 50)। ইয়াৰ পৰা আমি জানিম যে তৃতীয় ছেকেণ্ডত ৰকেটটোৰে (6 5 7) স্থানত আছে। এই মুহূৰ্তত ইয়াৰ বেগ প্ৰতি ছেকেণ্ডত 80 মিটাৰ। ইন্ধনৰ পৰিমাণ 390 কিলোগ্ৰাম আৰু ইঞ্জিনৰ উত্তাপ 50 ডিগ্ৰী। ইয়াত স্থান অনুৰূপে থকা সংখ্যাবোৰে অনুৰূপ তথ্য দিব।

মন কৰা যে তালিকাখনৰ প্ৰতিটো শাৰীকে আমি মহাকাশৰ একোটা বিন্দু বুলি ধৰিলে এই বিন্দুবোৰৰ সংহতিটোৰে ৰকেটযানখনৰ যাত্ৰা পথৰ

বৰ্ণনা দিব। এই প্ৰতিটো বিন্দুৱে সাতটাকৈ স্বতন্ত্ৰ মাত্ৰা বৰ্ণনা কৰিছে বাবে ইয়াক আমি এটা সাত-বিমীয় বিন্দুৰ উদাহৰণ হিচাপে ধৰিব পাৰো।

যাত্ৰাপথত বিন্দুবোৰ						
(0	0	0	0	0	400	34)
(1	2	3	1	60	400	39)
(3	5	6	2	70	398	45)
(6	5	7	3	80	390	50)
(6	6	9	4	90	389	70)
(7	8	10	5	100	388	90)
(8	9	40	6	150	387	100)
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-

গতিকে প্ৰতিটো বিন্দুৰ স্থানাংক 7-বিমীয়।

তোমালোকে যদি ৰকেটযানখনৰ যাত্ৰাপথৰ প্ৰতি স্থনাতে আৰু কিবা ওপৰঞ্চি সম্ভেদ জানিব বিচাৰিছা, তেন্তে প্ৰতি বিন্দুৰ পিছফালে আৰু যিমান লাগে ঘৰ বঢ়াব পাৰিবা। এইদৰে আঠ-বিমীয়, ন-বিমীয়, ... এশ-বিমীয় আদি যিকোনো সংখ্যক বিমাৰে ধাৰণা কৰিব পাৰিবা। এই বিমাবোৰৰ ধাৰণা অৱশ্যে অলপ বিমূৰ্ত্ত হ'লেও সহজে বুজা যাব। আমাৰ উদাহৰণটোত সাত-বিমীয় প্ৰতিটো বিন্দুৱে মিলি ৰকেটযানখনৰ যাত্ৰাপথটো নিৰ্ণীত হৈছে। গণিতত এই বিন্দুবোৰৰ সংহতিটোকে যাত্ৰাপথটোৰ এটা সমষ্টি বা ৰিক্ষ (space) বুলি কোৱা হয়। এতিয়া কোৱাচোন বাৰু যিদৰে আমি আগতে দুই-বিমীয় ৰেখা R, তিনি-বিমীয় ৰিক্ষ, অৰ্থাৎ (x, y, z) বিন্দুবোৰৰ সমষ্টি, আদি স্থানাংক পদ্ধতিৰ কথা কৈছিলো, আমাৰ ইয়াৰ উদাহৰণটোও এটা সাত-বিমীয় স্থানাংক পদ্ধতিৰ উদাহৰণ হয়নে নহয়?

আটায়ে ঃ হয় ছাৰ।

মেঘালী ঃ ছাৰ সাত-বিমীয় পদ্ধতিত প্ৰতিটো বিন্দুকে জানো আমি চিত্ৰৰ সহায়ত বুজাব পাৰিম?

ছাৰ ঃ আমাৰ এই বাস্তৱ অৰ্থাৎ মূৰ্ত্ত জগতত তিনি-বিমীয়ৰ ওপৰত কোনো বিমাৰে বাস্তৱ চিত্ৰ এখন আঁকাটো নাইবা আৰ্হিৰে সজাই বুজোৱাটো সম্ভৱ নহয়। ওপৰৰ ৰকেটযানৰ চিত্ৰখনত R বিন্দুটো দেখুওৱা হৈছে যদিও প্ৰকৃততে

ইইয়াৰ সম্পূৰ্ণ চিত্ৰ এখন প্ৰকাশ কৰিব পৰা নাই, যেনে— এই (x, y, z, t, u, F, T) বিন্দুটোত (x, y, z)ৰ বাস্তৱ অৱস্থানটোহে দেখুওৱা হৈছে। ইয়াত সময়, বেগ, ইন্ধন, উত্তাপ আদি মাত্ৰাবোৰৰ বাবে আমি কোনো অক্ষ বা প্ৰসংগ দেখুৱাব পৰা নাই। এইটো তিনি-বিমাৰ বাহিৰত। গতিকে আমি মাত্ৰা ধাৰণা কৰিহে লম, চিত্ৰৰে নাইবা আৰ্হি বনাই বুজাব নোৱাৰো।

প্ৰবাল ঃ ছাৰ, এই যে আপুনি বিন্দুবোৰ বুজাবলৈ বন্ধনীৰ ভিতৰত প্ৰতি মাত্ৰাৰ বাবে সংখ্যা একোটা লিখিছে, সেইবোৰক বন্ধনীৰ ভিতৰত ঠাইবোৰ সলাই ওলট পালট কৰিলে কিবা হ'ব নেকি?

ছাৰ ঃ তুমি একেবাৰে মৌলিক প্ৰশ্ন এটা কৰিছা। সংখ্যাবোৰ ওলট পালট কৰিব নোৱাৰিবা ; কাৰণ স্থানবোৰ এটা ক্ৰমত আছে। নিজা ক্ৰমত থাকিলেহে কোনটো সংখ্যা কিহৰ বাবে বহিছে বুজিব পাৰিবা। কিন্তু তাতোকৈ ডাঙৰ কথা হ'ল এই প্ৰতিটো বিন্দু মিলিহে এটা সমষ্টি। উচ্চ গণিতত আদৰ্শ সমষ্টিবোৰে কিছুমান বীজীয় ধৰ্ম মানিবলগীয়া হয়। বিন্দুবোৰৰ মৌলবোৰ ক্ৰমত নাথাকিলে এই ধৰ্মীয় প্ৰক্ৰিয়াবোৰ নাখাটে। উদাহৰণ স্বৰূপে দুই-বিমাত $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$ হয়। ইয়াত x, u একে আৰু y, v একে মাত্ৰা বুজাইছে। সেয়ে $x + u$ আৰু $y + v$ৰ অৰ্থ আছে। ঠাইবোৰ সলনি হ'লে এইবোৰ নিৰৰ্থক হ'ব। (x, y) আৰু (u, v) প্ৰতিটো যোৰেই একোটা ক্ৰমত থকাটো ইয়াত বাধ্যতামূলক। সেইদৰে তিনি-বিমাত (x, y, z), (u, v, w) আদিৰ সংখ্যাবোৰ ক্ৰমত থাকিব লাগিব। সেই প্ৰয়োজনীয়তাৰ খাতিৰতহে এনে ক্ৰমত থকা বিন্দুবোৰক আমি ক্ৰমিত যোৰ (ordered pair), ক্ৰমিত ত্ৰয় (ordered triple) আদি সংজ্ঞা বা নাম দি লৈছো। ক্ৰমিত সংখ্যাৰ বস্তুবোৰ আমাৰ গণিতত এবিধ মনোমোহা আৰ্হি, যাৰ সহায়ত আমি অনেক নতুন নতুন আৰ্হি তৈয়াৰ কৰি ল'ব পাৰো যিবোৰ আৰ্হিয়ে গণিতত অনেক সমস্যা সমাধানৰ ক্ষেত্ৰত নতুন নতুন ভূমিকা গ্ৰহণ কৰে। তোমালোকক ইয়াৰ বিষয়ে পাৰিলে পিছৰ শ্ৰেণীত কিছু কম। আজিলৈ আমাৰ সময় শেষ হৈ আহিল। গতিকে তোমালোকক এতিয়ালৈ কোৱা আটাইবোৰ কথাই ঘৰত গৈ জুকিয়াই চাবা আৰু আমি দিয়া কামবোৰ কৰি আনিবা। গুড্ নাইট।

সকলোৱে ঃ ধন্যবাদ, ধন্যবাদ ছাৰ।

* * * * * *

তৃতীয় দিন

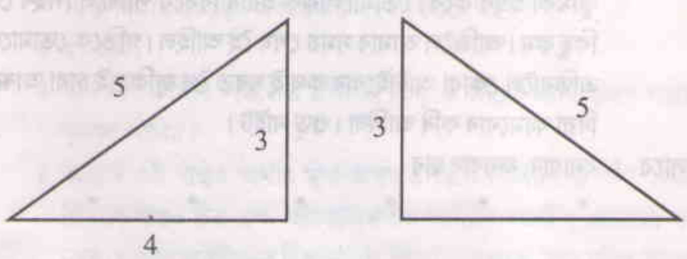
ক্ৰমে ক্ৰমে অনুক্ৰম

।। এৰা হয়। আমি নন্দন প্ৰতীম চৌধুৰী ছাৰৰ আগৰ ক্লাছটোৰ কথাই কৈ আহিছো। যোৱা শ্ৰেণীটোত ছাৰে ছাত্ৰ-ছাত্ৰীহঁতক বাৰু কি কথাবোৰ ক'লে! ছাৰে কৈছিল—

স্থানাংক পদ্ধতিৰ কথা, বিমা, যাদু, ক্ৰমিত সংখ্যা আদিৰ কথা। আজি পিছে নন্দন ছাৰৰ সলনি অইন এজন ছাৰহে আহিল। তেখেতৰ নাম বেদান্ত শৰ্মা, যোৰহাটৰ পৰা আহিছে। তেখেতে আহিয়েই ছাত্ৰ-ছাত্ৰীহঁতক নিজৰ পৰিচয় দি ল'লে। পিছত ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলৰো পৰিচয় ল'লে। তাৰ পিছত ক'লে— ।।

বেদান্ত ছাৰঃ মৰমৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীহঁত! তোমালোকক এইকেইদিন প্ৰতীম ছাৰে কোৱা কথাবোৰ মই জানি লৈছো। সেইবোৰ অতি সুন্দৰ আৰু গণিত ভাল পোৱা প্ৰত্যেক ছাত্ৰ-ছাত্ৰীয়ে জনা উচিত। নন্দন ছাৰে তোমালোকক যোৱাকালি সংখ্যাৰ ক্ৰম আৰু এইবোৰৰ ব্যৱহাৰৰ বিষয়ে কৈছিল। আজি আমি তেনেকুৱা কেইটামান বেলেগ উদাহৰণ আলোচনা কৰিম।

ধৰা মই তোমালোকক কেইটামান ত্ৰিভুজ আঁকিব ক'লো, যেনে— এইবুলি (3, 4, 5) এটা ত্ৰিভুজ। (3, 4, 5) বুলিলে বুজিবা যে মাজৰ 4 সংখ্যাটোৱে ভূমিৰ দীঘ বুজাব। গতিকে ভূমিৰ দীঘ 4 (যিকোনো একক)



আৰু বাকী বাহু দুটা 3 আৰু 5 ধৰি ত্ৰিভুজটো আঁকিব লাগে। ইয়াত 3 আৰু 5ৰ ক্ৰম ধৰা নাই কাৰণে ত্ৰিভুজটো দুই ধৰণে আঁকিব পাৰিবা। অৱশ্যে দুয়োটা ত্ৰিভুজ একেই। ঘূৰাই পকাই একেটাকে পাবা। ইয়াত (3, 4, 5) ত্ৰয়টো সম্পূৰ্ণ ক্ৰমিক নহয়। হ'লেও (3, 4, 5) ত্ৰয়টোৰ এটা অৰ্থ আছে আৰু ই আমাক কিবা এটা কথা চুটিকৈ প্ৰকাশ কৰাত সহায় কৰিছে।

অংকিতা ঃ ছাৰ, আমাক কৰিব দিলে ভালদৰে কথাটো বুজি পাম।

ছাৰ ঃ ঠিকেই কৈছা। অংকিতা, তোমাৰ গাণিতিক নাম কি?

অংকিতা ঃ ছাৰ আজি (3, 1, 2)।

ছাৰ ঃ তেন্তে তুমি (3, 1, 2) ত্ৰয়টোকে ব্যৱহাৰ কৰি এটা ত্ৰিভুজ আঁকা।

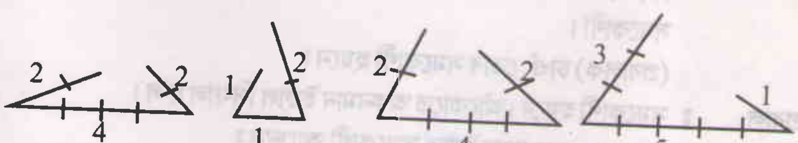
নীলিমা ঃ ছাৰ, আমিও আঁকিম।

ছাৰ ঃ নহয়, তোমালোকে একেটাকে আঁকিব নালাগে। তোমালোকৰ প্ৰত্যেকৰে গাণিতিক স্থানাংক নাম আছে। প্ৰত্যেকেই নিজৰ নিজৰ নাম লৈ একোটা ত্ৰিভুজ আঁকা।

আটায়ে ঃ হ'ব ছাৰ।

(সকলোৱে ত্ৰিভুজ অঁকাত লাগিল। কিন্তু কেইজনমানে বহুত চেষ্টা কৰিও আঁকিব নোৱাৰিলে। ছাৰে ঘূৰি ঘূৰি চাই গৈছে। কোনে কি আঁকিছে)

ছাৰ ঃ মই দেখিছো ৰুণুমী, মেঘালী, তৰালি, প্ৰবাল আৰু কিশোৰে আঁকিব পৰা নাই। তাৰ কাৰণ হ'ল ৰুণুমীৰ নম্বৰ (2, 4, 1), মেঘালীৰ নম্বৰ (1, 1, 2), তৰালিৰ নম্বৰ (2, 4, 2) প্ৰবালৰ নম্বৰ (3, 5, 1) আৰু কিশোৰৰ নম্বৰ (1, 6, 4)।



এতিয়া কোনে ক'ব পৰা এওঁলোকে ত্ৰিভুজবোৰ কিয় আঁকিব পৰা নাই। (ছাৰে ত্ৰিভুজকেইটাৰ চিত্ৰ ওপৰৰ দৰে আঁকি দেখুৱায়)

অংকিতা ঃ ছাৰ, তিনিটা বাহুৰ দীঘ দিলেই আমি ত্ৰিভুজ এটা আঁকিব নোৱাৰিবও পাৰো। কাৰণ এটা ত্ৰিভুজৰ দুটা বাহুৰ দীঘ তৃতীয়টোতকৈ বেছি হ'ব লাগিব।

ছাৰ : ভাল উত্তৰ। পিছে তোমাৰ উত্তৰটোত এটা ভুল থাকি গ'ল। তুমি ক'ব লাগিছিল এটা ত্ৰিভুজৰ প্ৰত্যেক দুটা বাহুৰ দীঘ....। তুমি 'প্ৰত্যেক' শব্দটো এৰিলা।

অংকিতা : হয় ছাৰ। প্ৰথম চিত্ৰত $2 + 1 \ngtr 4$, দ্বিতীয় চিত্ৰত $1 + 1 \ngtr 2$, তৃতীয় চিত্ৰ আৰু চতুৰ্থ চিত্ৰ দুটা একেই, যেনে— $2 + 2 = 4 \ngtr 4$।

ছাৰ : বঢ়িয়া। এতিয়া আৰু এটা কথা চোৱা। তোমালোকৰ কাৰ কাৰ চিত্ৰবোৰ সমবাহু? নমিতা ক'ব পাৰিবানে? বহীবোৰ কিন্তু কাৰো চাব নোৱাৰিবা।

নমিতা : পাৰিম ছাৰ। আটাইবোৰ বাহু সমান হ'লেই সমবাহু। সেয়ে (1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3) এওঁলোকৰ ত্ৰিভুজবোৰ সমবাহু।

ছাৰ : শুদ্ধ উত্তৰ। এতিয়া নিপন কোৱা কাৰ কাৰ ত্ৰিভুজবোৰ সমদ্বিবাহু?

নিপুকণ : ছাৰ, যাৰ যিকোনো দুটা বাহু সমান, যেনে— (1, 1, 7), (1, 2, 2) (3, 3, 3), (3, 3, 4), (2, 2, 3), (2, 3, 2), (2, 4, 4) ইত্যাদি।

ছাৰ : গতিকে (2, 5, 2)য়ো সমদ্বিবাহু হ'ব, তোমাৰ মতে। হয়নে?

নিপুকণ : হয়, ও, নহয় ছাৰ। (2, 5, 2) প্ৰকৃততে এটা ত্ৰিভুজেই নহয়।

ছাৰ : এৰা! গতিকে তুমি ক'ব লাগিছিল যি ত্ৰিভুজৰ যিকোনো দুটা বাহু...। কিন্তু তুমি ত্ৰিভুজ শব্দটোত জোৰ নিদিলা। গণিতত প্ৰত্যেকটো কথাই নিখুঁত হ'ব লাগে। এতিয়া কংকন কোৱা, তোমালোকৰ কাৰ কাৰ ত্ৰিভুজবোৰ সমকোণী?

কংকন : যিবোৰৰ সংখ্যা তিনিটাই পাইথাগোৰীয়ান ত্ৰয় গঠন কৰে, অৰ্থাৎ মোৰ যদি সংখ্যা ত্ৰয়টো (a, b, c) তেন্তে $a^2 + b^2 = c^2$ হ'ব লাগিব। গতিকে (3, 4, 5) যাৰ তেওঁৰহে ত্ৰিভুজটো সমকোণী, অৰ্থাৎ প্ৰবালৰ চিত্ৰটো সমকোণী।

(প্ৰবালক) চাওঁ, তোৰ সমকোণী হয়নে?

প্ৰবাল : সমকোণী হয়দে। আঁকোতে অকনমান ইফাল সিফাল হ'ল।

ছাৰ : আৰু বাৰু কাৰোবাৰ ইয়াত সমকোণী আছেনে?

(আটায়ে ইফালে সিফালে ঘূৰি চায়) কি কোৱা মেঘালী?

মেঘালী : নাই বোধহয় ছাৰ।

ছাৰ : চোৱা, তোমালোকৰ শ্ৰেণীত আৰু কোনো নাই। তাৰ কাৰণ হ'ল পাইথাগোৰীয়াল ত্ৰয়বোৰৰ ভিতৰত আটাইতকৈ সৰু প্ৰাথমিক ত্ৰয়টো হ'ল (3, 4, 5)। তোমালোকৰ শ্ৰেণীত মাত্ৰ তিনিটা স্তম্ভহে আছে; গতিকে

কোনোজনৰে নামৰ প্ৰথম সংখ্যাটো 4 তকৈ ডাঙৰ নহয়। তিনিতকৈ সৰু সংখ্যা থকা পাইথাগোৰীয়ান ত্ৰয় যদি আছেও তেতিয়া হ'লেও বাকী সংখ্যা দুটাও অতিকে ডাঙৰ হ'ব। যি সংখ্যাৰ এটাও আমাৰ শ্ৰেণীৰ কোনো ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰে নামত নাথাকিব। বুজিলানে?

তৰালি ঃ বুজি পাইছো ছাৰ, আমি ভাবিয়েই চোৱা নাছিলো যে আমাৰ ভিতৰত অকল প্ৰবালহে ভাগ্যবান যে সি সমকোণী।

[আটায়ে তাক 'সমকোণী সমকোণী' বুলি ফিচিক ফাচাককৈ জোকাবলৈ ধৰিলে। প্ৰবালে খঙতে উঠি গৈ মাজৰ স্তম্ভৰ দ্বিতীয় বেঞ্চৰ এজনৰ লগত বহিল। এইবাৰ তাৰ নাম হ'ল (2, 4, 3)]

ছাৰ ঃ দেখিছা, প্ৰবালৰ বুদ্ধিটো, সি তাৰ নাম সলাই ল'লে। পিছে এতিয়া দেখোন সি দুৰ্ভগীয়াহে হ'ল।

প্ৰবাল ঃ নহয় ছাৰ, ইহঁতে মোক পিছতো জোকাই থাকিব। সমকোণী সমকোণী বুলি।

ছাৰ ঃ বাৰু বাৰু হ'ব দিয়া, ভাল কথা। এতিয়া বাৰু কোৱা তোমালোকৰ কাৰ কাৰ ত্ৰিভুজবোৰ সদৃশ? কিশোৰ, ক'ব পাৰিবানে?

কিশোৰ ঃ পাৰিম ছাৰ। (1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (1, 1, 2), (2, 2, 4), (3, 3, 6) ইত্যাদিবোৰৰ ত্ৰিভুজবোৰ সদৃশ।

ছাৰ ঃ বেছ। হ'ব আৰু। মই বুজিছো যে তোমালোকে বুজিছা। মন কৰা যে সদৃশ ত্ৰিভুজৰ অনুৰূপ বাহুবোৰ সমানুপাতিক। ইয়াত (2, 2, 2) ত্ৰিভুজৰ বাহুবোৰ (1, 1, 1)ৰ দুগুণ। (3, 3, 3) ত্ৰিভুজৰ বাহুবোৰ (1, 1, 1)ৰ তিনিগুণ, (2, 2, 4) ত্ৰিভুজৰ বাহুবোৰ (1, 1, 2)ৰ দুগুণ ইত্যাদি।

অংকিতা ঃ ছাৰ! তেতিয়াহ'লে আমি ক'ব পাৰোনে যে—

$(2, 2, 4) = 2 \times (1, 1, 2)$ নাইবা

$(3, 3, 3) = 3 \times (1, 1, 1)$ ইত্যাদি।

ছাৰ ঃ অতি সুন্দৰ চিন্তা। ত্ৰিভুজৰ বাহুবোৰ একে ক্ৰমত থাকি যদি কথাবোৰ হয়, তেন্তে আমি নিশ্চয় এনে গাণিতিক চুটি আৰ্হিত প্ৰকাশ কৰিব পাৰিম। প্ৰকৃততে ত্ৰিভুজৰ বাহিৰেও অন্য সাধাৰণ ক্ষেত্ৰতো এনেদৰে থকা ক্ৰমিক ৰাশিবোৰক আমি একোটা গাণিতিক পদ হিচাপে ধৰি লৈ অজস্ৰ নতুন গাণিতিক আৰ্হি ব্যাখ্যা কৰাৰ বাবে ব্যৱহাৰ কৰো। আমি আজি এনে কথাকে অলপ কও আহা।

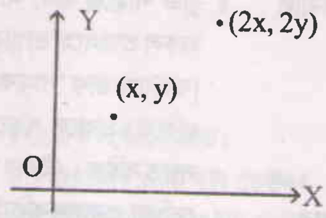
প্ৰথমে ধৰা দ্বি-বিমীয় দুটা ৰাশি (x, y) আৰু (u, v)। তেন্তে আমি সাধাৰণতে লিখিম—

(i) $a(x, y) = (ax, ay)$ (a এটা বাস্তৱ সংখ্যা)

(ii) $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$

(iii) $(x, y) - (u, v) = (x-u, y-v)$

যেনে ধৰা (x, y), (u, v) দুয়ো স্থানাংক সমতলৰ দুটা বিন্দু। তেন্তে $2(x, y) = (2x, 2y)$য়ো এটা বিন্দু, যাৰ x, y স্থানাংক দুটাই দুগুণ মাপৰ স্থান পাব। সেইদৰে ওপৰৰ (ii) আৰু (iii)ৰ চিত্ৰ দুটাও আঁকিব পাৰিবা।



এনেদৰে আমি তিনি-বিমীয়, চাৰি-বিমীয় আদি ৰাশিবোৰৰ ক্ষেত্ৰতো এনে সংখ্যাৰে পূৰণ আৰু যোগ-বিয়োগ কৰি দেখুৱাব পাৰিম।

নিপুকণ ঃ ছাৰ, উচ্চ বিমাৰ পদ্ধতিত এনে যোগ-বিয়োগ, পূৰণ প্ৰক্ৰিয়া আদিৰ জানো কিবা অৰ্থ আছে?

ছাৰ ঃ এই প্ৰক্ৰিয়াবোৰ প্ৰকৃততে সংজ্ঞা দি লোৱা হৈছে। অৰ্থ থাকক বা নাথাকক উচ্চ গণিতৰ খাতিৰত এই প্ৰক্ৰিয়াবোৰ এনেদৰে কৰা হয়। কিন্তু মনত ৰাখিবা, প্ৰত্যেক সংজ্ঞাৰ আঁৰতে কিছুমান অৰ্থভিত্তিক কথা থাকে।

নিপুকণ ঃ ছাৰ দুটামান সহজ উদাহৰণ দিব নেকি?

ছাৰ ঃ (অলপ ভাবি) বাৰু ৰ'বা। ধৰা, অহা কাইলৈ মোৰ জন্মদিন। তোমালোকৰ প্ৰত্যেকে মোৰ কাৰণে চাৰিটাকৈ উপহাৰ আনিছা ; যেনে চকলেট, পেন, কিতাপ আৰু কোকাকোলা, কাৰণ তোমালোকে জানা যে মই এইকেইটা বস্তুহে ভাল পাওঁ। বস্তুবোৰ আনি তোমালোক প্ৰত্যেকে ভাগ কৰি চাৰিখন টেবুলত ক্ৰম অনুসৰি মই বোৰ্ডত দেখুৱাৰ দৰে থৈছা। মই ইয়াত মাত্ৰ চাৰিজনৰ উপহাৰহে দেখুৱাইছো—

ছাত্ৰ	(1) (চকলেট)	(2) (পেন)	(3) (কিতাপ)	(4) (কোকাকোলা)
(A) অংকিত	5	1	2	1
(B) নয়ন	10	2	4	2
(C) অংকিতা	2	5	6	3
(D) নমিতা	5	1	2	1

এতিয়া কোৱাচোন বাৰু যদি তোমালোকৰ উপহাৰবোৰ মই ক্ৰম অনুসৰি এইদৰে লিখো—

A =(5, 1, 2, 1), B = (10, 2, 4, 2), C = (2, 5, 6, 3) আৰু D = (5, 1, 2, 1)

তেন্তে এওঁলোক চাৰিজনৰ মুঠ উপহাৰবোৰ কি হ'ব?

কিশোৰ ঃ ছাৰ আটাইবোৰ যোগ কৰিলে স্থান অনুসৰি আমি পাম (গণি গণি কয়) (22, 9, 14, 7)

ছাৰ ঃ গতিকে কোৱাচোন, মই কি বস্তু কিমানকৈ উপহাৰ পালো?

কিশোৰ ঃ ছাৰ আপোনাৰ চকলেট হ'ব 22 টা, পেন 9 টা, কিতাপ 14 খন আৰু কোকাকোলা 7 টা।

প্ৰবাল ঃ ছাৰ, ইমানবোৰ বস্তু! সঁচাকৈ পালে আমাকো দিবনে?

ছাৰ ঃ মই জানো কেতিয়াবা কিবা অকলে ৰাখিছো? মোৰ জ্ঞানখিনিও দেখোন তোমালোককে দিলো।

ৰুণুমী ঃ ধেমালি নকৰিবচোন। সঁচাকৈ আপোনাৰ জন্মদিন কেতিয়ানো ছাৰ?

ছাৰ ঃ মোৰ জন্মদিন মোৰ লৰা ছোৱালীয়েহে মনত ৰাখে। তথাপি মোৰ যিমানদূৰ মনত পৰে মোৰ জন্মদিনটো (দিন, মাহ, বছৰ) ক্ৰম হিচাপে (29, 2, 1971)।

অংকিতা ঃ ছাৰ, আপুনি আকৌ আমাৰ লগত ধেমালিহে কৰিছে। এনেকুৱা কোনো দিন থাকিব নোৱাৰে; কাৰণ 1971 টো লিপইয়েৰো নহয়। গতিকে 29 ফেব্ৰুৱাৰী হ'ব নোৱাৰে। তাতে আকৌ এতিয়া মাৰ্চ মাহ, অৰ্থাৎ আপুনি এনে বুদ্ধি কৰিছে যেন আপোনাৰ জন্মদিনলৈ প্ৰায় এবছৰমানহে বাকী আছে।

নিপুকণ ঃ ছাৰ, আপোনাৰ জন্মদিন কিন্তু আমি খামেই।

ছাৰ ঃ (হাঁহি) হ'ব বাৰু। কিন্তু মোৰ জন্মদিনত ইয়াত খুৱাব নোৱাৰিম, কাৰণ মই ওপজা দিনটো সদায় বন্ধৰ দিনতহে পৰিব। গতিকে মোৰ ঘৰলৈ তোমালোক আটাইকে মাতিম। শুনি সুখী হ'বা যে মোৰ জন্মদিন আৰু বহাগৰ বৰবিহু একেটাই দিন। গতিকে আটাইবোৰেই আহিবা। কিন্তু চকলেট, পেন, কিতাপ আদি কোনেও মোলৈ উপহাৰ একো বস্তুকে নানিবা। যদি ইচ্ছা কৰা স্কুলঘৰটোত পুতিবলৈ একোটা গছ বা ফুলৰ পুলি আনিবা।

ময়ুৰ ঃ আনিম ছাৰ, ৰুইয়ো দিম। কিন্তু ছাৰ আমাৰ খোৱাটো কি হ'ব?

ছাৰ ঃ অকনো চিন্তা নকৰিবা। সিদিনা আমি স্কুলৰ পৰা পোনে পোনে মোৰ

ঘৰলৈ যাম আৰু তাত চকলেট, ক্ৰীম, কেক, মাখন আদি যি ভাল পোৱা তাকেই ইচ্ছামতে খাবা।

নীলিমা ঃ হ'ব ছাৰ, তাত কিন্তু আপুনি আগৰদৰে চকলেট ক্ৰীম সনা কেক কাটিবলৈ কৈ আমাক কেকৰ টুকুৰাৰ ওপৰত গণিতৰ প্ৰশ্ন নকৰিব।

ছাৰ ঃ (হাঁহি) হ'ব হ'ব। তোমালোকে যি ভাল পোৱা সেইমতে কৰিম। হ'লেও আজি কিন্তু আমি গণিত কৰিবলৈহে আহিছো। মনত আছেনে?

আটায়ে ঃ (লাহেকৈ) আ-ছে ছাৰ।

ছাৰ ঃ তেন্তে বোৰ্ডৰ তালিকাৰ পৰা কোৱা। অংকিতা আৰু নমিতাৰ মুঠ উপহাৰ কিমান? কোনে ক'বা?

নয়ন ঃ মই কম ছাৰ। A আৰু D যোগ কৰিলে (10, 2, 4, 2) গতিকে দুয়োৰে মুঠ চকলেট 10 টা, পেন 2 টা, কিতাপ 4 খন আৰু ....।

ছাৰ ঃ বেছ, হ'ব আৰু। গতিকে তালিকা চাই দুটামান প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া—
(i) নমিতা আৰু অংকিতা দুয়োৰে উপহাৰ খিনি মিলি কাৰ সমান?

আটায়ে ঃ (লগে লগে) ছাৰ, নয়ন, নয়নৰ সমান ছাৰ।

ছাৰ ঃ হয়, এইবাৰ ক'বা, দ্বিতীয় প্ৰশ্ন—
অংকিতাতকৈ নয়নে মোক কিমান বেছি দিলে?

নয়ন ঃ ছাৰ মই আপোনাক দুগুণ বেছি দিলো।

ছাৰ ঃ (হাঁহি) হ'ব ৰ'বা, বাকীবোৰে কি কয়?

বাকীবোৰ ঃ হয় ছাৰ।

নমিতা ঃ ছাৰ নয়নে অংকিতাতকৈ চকলেট 5টা, পেন 1টা, কিতাপ 2খন, কোকাকোলা 1টা বেছিকৈ দিছে।

ছাৰ ঃ ভাল কথা। তোমালোকে এইবোৰ কিদৰে উলিয়ালা?

নমিতা ঃ ছাৰ, ক্ৰম অনুসৰি বিয়োগ কৰি।

ছাৰ ঃ গতিকে এতিয়ালৈ আমি কি দেখিলো চোৱা।
(ক) A + B + C + D (আটাইবোৰ যোগ কৰিলে)
= (5, 1, 2, 1) + (10, 2, 4, 2) + (2, 5, 6, 3) + (5, 1, 2, 1)
= (5+10+2+5, 1+2+5+1, 2+4+6+2, 1+2+3+1)
= (22, 9, 14, 7) ঃ হয়নে?
গতিকে ক্ৰমিত ৰাশিবোৰ যোগ কৰোতে আমি ক্ৰম স্থান অনুসৰি এটা এটাকৈ যোগ কৰো।

ইয়াত প্ৰথম স্থানাংকৰ যোগফল 22
দ্বিতীয় স্থানাংকৰ যোগফল 9
তৃতীয় স্থানাংকৰ যোগফল 14
আৰু চতুৰ্থ স্থানাংকৰ যোগফল 7

সেইদৰে দ্বিতীয় প্ৰশ্নত নয়নৰ উত্তৰটো গাণিতিকভাৱে এনে হ'ব

$2A = B$

অৰ্থাৎ $2(5, 1, 2, 1) = (2 \times 5, 2 \times 1, 2 \times 2, 2 \times 1)$ বা $(10, 2, 4, 2)$

অৰ্থাৎ অংকিতাৰ দুগুণ = নয়ন

আকৌ নমিতাই কি কৰিছিল ? চোৱা—

$(10, 2, 4, 2) - (5, 1, 2, 1) = (5, 1, 2, 1)$

ইয়াতো স্থানাংক অনুসৰি এটা এটাকৈ বিয়োগ কৰি কৈছে নয়নৰ কোনপদ উপহাৰ অংকিতাতকৈ কিমান বেছি?

ময়ূৰী ঃ ছাৰ নয়নতকৈ অংকিতা কিমান কম আমি কিদৰে উলিয়াম ?

ছাৰ ঃ (বোৰ্ডলৈ চাই) এ হয়হে, ময়ূৰীয়ে কম কথা কয় যদিও প্ৰশ্নটো বৰ সুন্দৰ; কাৰণ $(10, 2, 4, 2) - (2, 5, 6, 3) = (8, -3, -2, -1)$
অৰ্থাৎ নয়নতকৈ অংকিতাৰ মাত্ৰ চকলেটহে 8 টা কম, কিন্তু অইন বাকী পেন 3 টা, কিতাপ দুখন আৰু কোকাকোলা 1 টা বেছি, কাৰণ ইয়াত কমৰ ক্ষেত্ৰত বিয়োগাত্মক সংখ্যা দেখুৱাইছে। গতিকে আমি জানিলো যে স্থানাংকবোৰ যোগ বা বিয়োগ কৰিলেও সদায় একেটা ফালৰ পৰাহে কৰিব লাগে, নহ'লে ভুল হ'ব।

অংকিতা ঃ ছাৰ, দুটা ক্ৰমিত ৰাশিৰ কোনটো ডাঙৰ কোনটো সৰু আমি কেনেকৈ জানিম ? যেনে আপোনাক মই উপহাৰ বেছি দিলো নে নমিতাই বেছি দিলে ?

ছাৰ ঃ তোমাৰ প্ৰশ্নটো অতি স্বাভাৱিক ; কিন্তু বাস্তৱিকতে প্ৰশ্নটো জটিল ; ইয়াৰ উত্তৰ দিয়া টান। প্ৰকৃততে এনেদৰে সোধা প্ৰশ্নৰ সঠিক উত্তৰ নাই, কাৰণ তোমাৰ উপহাৰ = $(2, 5, 6, 3)$ আৰু নমিতাৰ উপহাৰ = $(5, 1, 2, 1)$ গতিকে কিছুমান উপহাৰ তোমাৰ বেছি আৰু কিছুমান উপহাৰ নমিতাৰ বেছি।

প্ৰবাল ঃ ছাৰ, মই ক'ব পাৰো, দেখাদেখিকৈ অংকিতাৰ উপহাৰ বেছি, কাৰণ অংকিতাৰ মুঠ উপহাৰ $2+5+6+3=16$ আৰু নমিতাৰ উপহাৰ = $5+1+2+1=9$।

ছাৰ ঃ তোমাৰ উত্তৰটো সঠিক নহ'ল। তুমি কি হিচাপে বেছি বা কমটো নিৰ্ণয় কৰিলা? বস্তুৰ মূল্য হিচাপ কৰিলে উত্তৰ এটা হ'ব, বস্তু ওজন হিচাপ কৰিলে উত্তৰ অইন এটা হ'ব, বস্তুৰ সংখ্যা হিচাপ কৰিলে আৰু অইন এটা হ'ব, বস্তুৰ গুণ হিচাপ কৰিলে উত্তৰ হয়টো অইন এটা হ'ব। গতিকে মাত্ৰ বস্তুৰ সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰতহে তোমাৰ উত্তৰটো খটিব। সেয়ে আমি ক্ৰমিত সংখ্যাবোৰ নাইবা ওপৰৰ দৰে ৰাশিবোৰৰ ডাঙৰ সৰু নিৰ্ণয় কৰোতে কি সাপেক্ষে ডাঙৰ বা সৰু সেইটো উল্লেখ কৰিব লাগে। ইয়াকে কোৱা হয় ক্ৰম সম্পৰ্কৰ (order relation)ৰ সংজ্ঞা। যেনে আমাৰ দুটা বস্তুৰ সংখ্যা a, bৰ ক্ষেত্ৰত —

$a > b$ বোলে যদি $a - b > 0$, অৰ্থাৎ যোগাত্মক সংখ্যা

$a = b$ বোলে যদি $a - b = 0$,

আৰু $a > b$ বোলে যদি $a - b < 0$ অৰ্থাৎ এটা বিয়োগাত্মক সংখ্যা।

ঠিক তেনেদৰে অইন ৰাশিৰ ক্ষেত্ৰতো তোমালোকে নিজাকৈ কিছুমান সংজ্ঞা দি ল'ব পাৰা, যেনে ধৰা—

যদি $P = (a, b, c)$, $Q = (x, y, z)$ দুটা ক্ৰমিত ৰাশি তেন্তে আমি ক'ব পাৰো—

$P > Q$ (বা $Q < P$) যদি (i) অকল $a > x$, নাইবা (ii) অকল $b > y$, নাইবা (iii) অকল $c > z$, নাইবা (iv) $a > x, b \geq y, c \geq z$, নাইবা (v) $a = x, b > y, c \geq z$, নাইবা (vi) $a = x, b = y, c > z$

এনেকুৱা ধৰণে যি কোনো ক্ৰম সম্পৰ্কৰ সংজ্ঞা দি কেইটামান উদাহৰণ ঘৰত কৰি লৈ আহিবা। উদাহৰণ স্বৰূপে ধৰা আমি স্থানাংক সমতলত দুটা বিন্দু (a, b) আৰু (a′, b′)ক ক্ৰম সম্পৰ্কত এইদৰে সংজ্ঞা দি ল'লো।

$(a, b) > (a', b')$ যদি $a > a'$ নাইবা $a = a'$ আৰু $b > b'$

তেন্তে সমতলৰ চাৰিটা বিন্দু

A(1, 2), B(3, 1), c(4, 3)

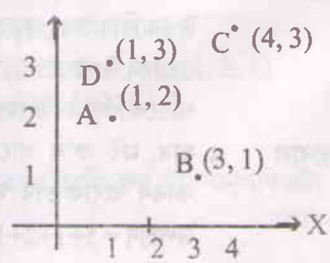
আৰু D(1, 3)ৰ ক্ষেত্ৰত

(i) B > A কাৰণ 3 > 1

(ii) D > A কাৰণ 1 = 1

আৰু 3 > 2

(iii) B < C কাৰণ 3 < 4 ইত্যাদি।



এই বিশেষ ক্ৰমটোক আভিধানিক ক্ৰম (lexicographical বা dictionary order) বোলে।

নিপুকণ ঃ ছাৰ, কথাটো আৰু আৰু অলপ বুজাই ক'ব নেকি?

ছাৰ ঃ এখন অভিধানত ধৰা আমি বৰ্ণমালাৰ অক্ষৰবোৰ যি ক্ৰমত থাকে তাকে এটা ক্ৰম (<) বুলি ধৰি ল'লো। যেনে $a < b < c < d < e < f$...... ইত্যাদি। তেন্তে অভিধানত থকা শব্দবোৰক আমি এনে ক্ৰমত সজাব পাৰো যাতে দুটা শব্দ axis আৰু busyৰ ভিতৰত axisটো আগত থাকিব, কাৰণ $a < b$.

আকৌ busy আৰু bushৰ ভিতৰত bushটো আগত থাকিব কাৰণ $b = b$, $u = u$, $s = s$ কিন্তু $h < y$। এই অভিধানিক ক্ৰমটোক যদি আমি< নাম দিও তেন্তে ইয়াক লিখিব পাৰিবা axis< busy আৰু bush< busy.

ৰুণুমী ঃ ছাৰ, আমি কম নেকি যে axis শব্দটো busyৰ তুলনাত সৰু বা ডাঙৰ?

ছাৰ ঃ এইবোৰ কিবা এটা ক্ৰমত সজাব বিচৰা সম্পৰ্কহে। ইয়াত সৰু, ডাঙৰ, বেছি, কম আদি আমি ভাবি থকা সম্পৰ্ক নহয়। প্ৰকৃততে আমি অবাস্তৱভাৱে আৰু আমাৰ কিবা একোটা প্ৰয়োজন সপেক্ষে নিজে সংজ্ঞা দি লোৱা এইবোৰ কোনোবা ক্ৰম সম্পৰ্কহে। আমি সৰুৰে পৰা পাই অহা $4 > 2$, $x \leq 9$ আদি সম্পৰ্কৰ সাদৃশ্য থকা আৰু সাধাৰণ ক্ষেত্ৰত বৰ্ণোৱা এনে সম্পৰ্কবোৰ গণিতত বহুলভাৱে প্ৰয়োগ হয়। ধাৰণাবোৰ অলপ বিমূৰ্ত্ত, কিয়নো সমতলৰ বিন্দু দুটাৰ মাজত জানো আমি ডাঙৰ সৰু চিনিব পাৰো? কিন্তু কেতিয়াবা কিবা এক ধৰণে এই বিন্দুবোৰকো একোটা ক্ৰমত সজাবলগীয়া হয়। এই ক্ষেত্ৰত এই ক্ৰমবোৰৰ বাবে আমি সচৰাচৰ সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰত ব্যৱহাৰ কৰা 'সৰু' (<) বা 'ডাঙৰ সমান' ($\geq$) আদি প্ৰতীক ব্যৱহাৰ নকৰি অইন তেনে প্ৰতীকহে ব্যৱহাৰ কৰো।

কিশোৰ ঃ ছাৰ কথাবোৰ নতুন নতুন যেন লাগিলেও কিন্তু আমাৰ ভাল লাগিছে।

ছাৰ ঃ ভাল কথা। পিছে তোমালোকে কি বুজিলা মই দুটামান ঘৰত কৰি আনিবলৈ অনুশীলনী দিম। দিমনে?

আটায়ে ঃ দিয়ক ছাৰ।

ছাৰ ঃ প্ৰশ্নবোৰ সৰল কৰা, মই বোৰ্ডত লিখি দিছো।

(a) $(3, 1, 4, 2) + (6, 7, 1, 9)$

(b) $(2, 4, 6) + (6, -1, 4) + (3, 2, 1)$

(c) (2, 1) + (4, 6)
(d) (4, 5, 2) - (2, 4, 1)
(e) (9, 2, 1, 5, 6, 4) - (2, 0, 1, 4, 5, 7)
(f) 3(4, 5)
(g) -7(2, 1, 6)
(h) 8(1, 2, 3, 0) - 2(4, 5, 6, 4)
(i) 2(1, 5) + 4(6, 2) - 3(5, 2)

ধন্যবাদ। আজিলৈ আমি ইয়াতে এৰিলো। কাইলৈ আকৌ এবিধ নতুন সোৱাদ ল'ম।

আটায়ে ঃ ধন্যবাদ, ধন্যবাদ ছাৰ।

* * * * * * *

চতুৰ্থ দিন

পদকৰ স্থান-তালিকাৰ মান

।। পিছৰ দিনাখন দেওবাৰ আছিল কাৰণে সিদিনা স্কুল বন্ধ আছিল। প্ৰকৃততে তাৰ পিছৰ সোমবাৰটোতহে বেদান্ত ছাৰ আকৌ গণিতৰ শ্ৰেণী সোমাল।।

ছাত্ৰসকল ঃ ছাৰ নমস্কাৰ।

ছাৰ ঃ নমস্কাৰ, নমস্কাৰ। পিছে কি খবৰ! যোৱা শ্ৰেণীত তোমালোকে নিশ্চয় মই কৰিবলৈ দিয়া ঘৰৰ কামখিনি কৰিব পাৰিছা। নহয় জানো?

ছাত্ৰসকল ঃ হয় ছাৰ পাৰিছো, সেইবোৰ তেনেই উজু আৰু ভাল লগা। আমি প্ৰত্যেকে প্ৰত্যেকৰ লগত মিলাই চাইছো। উত্তৰো একে হৈছে।

ছাৰ ঃ তেতিয়াহ'লে সুন্দৰ। আজি আমি আকৌ তাতোকৈ ভাল লগা কিছুমান একেধৰণৰ গণিতৰ সোৱাদ ল'ম।

আটায়ে ঃ হ'ব ছাৰ।

নিয়ৰ ঃ ছাৰ, মই আজি নতুনকৈ আহিছো। মই আটাইবোৰ ভাল কথা হেৰুৱাইছো যদিও যোৱাকালি প্ৰবালহঁতৰ পৰা অলপ বুজি লৈছো। পিছে ছাৰ আপুনি আজিও কিবা এটা গণিতৰ যাদু দেখুৱাবনে?

ছাৰ ঃ হ'ব বাৰু। তোমাৰ বন্ধুহঁতেও দেখুৱাব পাৰিব। মন কৰিছানে আজি তোমাৰ নাম কি? সোকাযৰ বন্ধুক সুধি লোৱা।

নিয়ৰ ঃ (লগৰবোৰক সুধি বুজি উঠি) ও ছাৰ বুজিছো, মোৰ গাণিতিক নাম আজিৰ বাবে (3, 4, 4)।

ছাৰ ঃ এৰা, আজি আৰু তোমালোক দুজনীক নতুনকৈ অহা যেন লাগিছে।

তৰালি আৰু নীলাক্ষি ঃ (দুয়ো থিয় হৈ কয়) আমি হয় ছাৰ।

ছাৰ ঃ ভাল কথা। বহা। তোমালোকেও নামবোৰ শিকা। বাৰু, এতিয়া এখন বিশ্বযুদ্ধ আৰম্ভ হৈছে, গম পোৱানে?

আটায়ে ঃ (ইটোৰে সিটোৰ মুখলৈ চায়) কেনে যুদ্ধ ছাৰ।

ছাৰ ঃ হেৰা! গম পোৱা নাই? যোৱা শুক্রবাৰৰ পৰা যে লণ্ডন অলিম্পিক আৰম্ভ হ'ল? সেয়া জানো বিশ্ব যুদ্ধ নহয়।

আটায়ে ঃ হয় হয়, ছাৰ। গম পাইছো।

ছাৰ ঃ আজিলৈকে কোন দেশে কি কৰিছে মই লিখা এই পদকৰ তালিকাখন চোৱা। মই মাত্র ভাল ফল দেখুৱা পাঁচখন দেশৰহে খবৰ লিখিছো। দেশবোৰৰ নাম দিলো A, B, C, D আৰু E আৰু তালিকাত এই ক্রমতে

দেশ	সোণ (G)	ৰূপ (S)	ব্ৰঞ্জ (B)	মুঠ (T)
A) আমেৰিকা	7	2	2	11
B) ব্ৰাজিল	0	4	0	4
C) চীনা	5	0	2	7
D) দক্ষিণ কোৰিয়া	0	1	1	2
E) ইটালী	1	3	4	8

সজাইছো। এতিয়া তোমালোকে ভাল-বেয়া ফল হিচাপে তালিকাখন নতুনকৈ সজোৱা। ইয়াত ক্রম সম্পর্কটো আমি আগতে কৈ অহা ধৰণে ল'ব পাৰিবা। যেনে $P > Q$ অৰ্থাৎ $P = (a, b, c, d)$য়ে $Q = (p\ q\ r\ s)$ -তকৈ ভাল ফল দেখুৱাব —

(i) যদি অকল $a > p$, বাকীবোৰ যিয়েই নহওক,

নাইবা (ii) যদি $a = p$, আৰু $b > q$, বাকী দুটা যিয়েই নহওক,

নাইবা (iii) যদি $a = p$, $b = q$ আৰু $c > r$, বাকীটো যিয়েই নহওক।

উদাহৰণ স্বৰূপে তালিকাত $A > C$ কাৰণ ইয়াত $A = (7, 2, 2, 11)$ আৰু $C= (5, 0, 2, 7)$। যিহেতু $7 > 5$, গতিকে বাকীবোৰ যিয়েই নহওক $A > C$

এতিয়া তোমালোকে উত্তৰ দিয়া, তলৰ কোনটো শুদ্ধ?

(a) $A > C > B > E > D$ b) $A > C > E > B > D$

(c) $A > B > C > D > E$ d) $B > A > C > D > E$

(ছাত্র-ছাত্রীহঁতে অলপ দেৰি যত্ন কৰাৰ পিছত)

অংকিতা আৰু ৰুণুমী ঃ (একেলগে) ছাৰ, (B) নংটো।

ছাৰ ঃ বাকীবোৰে কি পালা?

নিপুকণ আৰু ময়ুৰ ঃ ছাৰ, (a)টো হ'ব।

নীলাক্ষি ঃ নহয় ছাৰ (b) টোহে শুদ্ধ

আটায়ে ঃ ছাৰ (b)টো শুদ্ধ।

ছাৰ ঃ এৰা, ঠিকেই (b)টোহে শুদ্ধ। এইবাৰ ক'বা
(i) এতিয়ালৈকে মুঠ কেইটা কি পদক দেশবোৰে পালে?

প্ৰবাল ঃ ছাৰ সোণ 13 টা, ৰূপ 10 টা আৰু ব্ৰ'ঞ্জ 9 টা।

ছাৰ ঃ হয়, ধৰা মই এইদৰে লিখিলো— তালিকাখনৰ পৰা চুটিকৈ
(1, 3, 4, 8), (0, 1, 1, 2), (0, 4, 0, 4)
তোমালোকে কি বুজিবা?

নীলিমা ঃ ছাৰ, ইটালীয়ে সোণ 1 টা, ৰূপ 3 টা, ব্ৰ'ঞ্জ 4 টা আৰু মুঠ পদক পাইছে 8 টা। সেইদৰে কোৰিয়া আৰু ব্ৰাজিল।

ছাৰ ঃ ভেৰি গুড্। ধৰা মই গোটেই তালিকাখনকে আকৌ এইদৰে লিখিলো; চুটিকৈ—

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 & 11 \\ 5 & 0 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ইয়াত G, S, B, Tৰ ক্ৰমবোৰ ঠিকেই ৰাখিছো। বাকী দেশৰ বা পদকৰ নাম তালিকাত উল্লেখ কৰা নাই। তোমালোকে মনত ৰাখি ক'ব পাৰিবানে, তালিকাৰ কোনটো সংখ্যাই কি বুজাইছে?

অংকিত ঃ পাৰিম ছাৰ।

ছাৰ ঃ আমি পথালিকৈ লিখা সংখ্যাবোৰক শাৰী (row) আৰু থিয়কৈ লিখা শাৰীবোৰক যদি স্তম্ভ (column) বুলি কও, তেন্তে কোৱা তৃতীয় শাৰীৰ তৃতীয় স্তম্ভত থকা সংখ্যাটোৱে কি বুজাইছে?

নমিতা ঃ ছাৰ, ইয়াত সংখ্যাটো 4য়ে বুজাইছে যে ইটালীয়ে 4 টা ব্ৰঞ্জৰ পদক পাইছে।

ছাৰ ঃ এই 4 আৰু চতুৰ্থ শাৰীৰ দ্বিতীয় স্তম্ভত থকা 4, দুয়োটা একেইনে?

নমিতা ঃ নহয় ছাৰ। সংখ্যা দুটা একে হ'লেও পিছৰটো 4য়ে ব্ৰাজিলে পোৱা ৰূপৰ পদক বুজাইছে।

ছাৰ ঃ গতিকে ইয়াৰ অৰ্থ হ'ল যে তালিকাখনৰ সংখ্যাবোৰ, যাক আমি মৌল বা ইংৰাজীত element বুলি কম, ইহঁতৰ স্থান অনুসৰি একোটা সুকীয়া অৰ্থ আছে। তালিকাখনত 5 টা শাৰী আৰু 4 টা স্তম্ভ আছে কাৰণে ইয়াৰ আকাৰ আমি 5×4 বুলি কম।

তোমালোকে অলিম্পিকৰ পদকৰ তালিকাখন দিনে দিনে তথ্যবোৰ লৈ দীঘলীয়াও কৰিব পাৰিবা, বা অকল G, S আৰু B শাৰী তিনিটা লৈও এখন অৰ্থপূৰ্ণ তালিকা সজাব পাৰিবা। গণিতত এনেদৰে কোনো কথাৰ কাৰণে সজোৱা তালিকা এখনক 'মেট্ৰিক্স' (matrix) নাম দিয়া হয়।

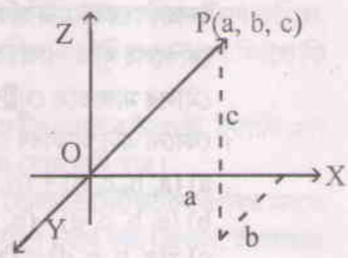
বুজিলানে মেট্ৰিক্সৰ আকাৰ যি কোনো হ'ব পাৰে। যেনে---- (1, 3, 4, 8) এটা 1×4 আকাৰৰ মেট্ৰিক্স। ইয়াক লিখিব পাৰা $(1, 3, 4, 8)_{1 \times 4}$ হিচাপে। এইবোৰৰ নাম শাৰী মেট্ৰিক্স (Row matrix), কাৰণ ইয়াত মাথোন এটা শাৰীহে আছে। সেইদৰে অকল এটা স্তম্ভ থকা মেট্ৰিক্সক স্তম্ভ মেট্ৰিক্স বোলে। শাৰী মেট্ৰিক্স বা স্তম্ভ মেট্ৰিক্সক গণিতত ভেক্টৰ (vector) বুলিও কয়। উচ্চ গণিতত মেট্ৰিক্স, ভেক্টৰ আদিৰ প্ৰয়োগ বহুল। এইবোৰক গণিতৰ একোটা আহিঁ হিচাপে লৈ বিভিন্ন কামত খটোৱা হয়। আমি সেইবোৰ কথা নাপাতি এনে সৰল গাণিতিক আহিঁবোৰকো কিদৰে উপাদেয় ভাৱে আমাৰ সচৰাচৰ সংখ্যাবোৰৰ দৰে ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰো তাকেহে বুজি চাম।

নিপুকণ ঃ ছাৰ, আপুনি যে এইমাত্ৰ শাৰী আৰু স্তম্ভ মেট্ৰিক্সৰ কথা ক'লে, সেইবোৰ আমি আগতে পাই অহা স্থানাংকৰে বিন্দু বুজোৱা ৰাশিবোৰৰ দৰে একেই নে বেলেগ?

ছাৰ ঃ হয় একেই, সেইবোৰকে লৈ আমি কি কৰিব পৰো তাৰে পদ্ধতি বিচাৰিহে এনে মেট্ৰিক্সৰ আহিঁৰ উদ্ভাৱন। যেনে ধৰা দুই-বিমীয় পদ্ধতিৰ বিন্দু (2, 4), (7, 6) আদি বা তিনি-বিমীয় পদ্ধতিৰ বিন্দু (1, 4, 5), (-2, 3, 7) এইদৰে যিকোনো বিমীয় পদ্ধতিৰ ৰাশিবোৰো একোটা মেট্ৰিক্স। প্ৰকৃততে এটা শাৰীত প্ৰকাশ কৰা এই মেট্ৰিক্সবোৰক একোটা ভেক্টৰ ৰাশি বুলিব পৰা যায়।

নীলাক্ষি ঃ ছাৰ, আমি পদাৰ্থ বিজ্ঞানত বল, ত্বৰণ আদি পঢ়োতে এনে ভেক্টৰ ৰাশি কিছুমানৰ কথা পাইছিলো। ভেক্টৰৰ বোলে দিশ থাকে। আপুনি কোৱা ভেক্টৰবোৰ একেই নে বেলেগ?

ছাৰ ঃ বঢ়িয়া প্ৰশ্ন! ভেক্টৰক আমি অসমীয়াত সদিশ বুলিও কওঁ। তোমালোকৰ বলবিজ্ঞানত পঢ়া এনে ৰাশিবোৰত দিশৰ ধাৰণা আছে কাৰণে এইবোৰক সদিশ নাম দিয়া হয়। যেনে ধৰা $\vec{P}$ এটা বল। ইয়াত বল বা শক্তি বুলিলে তাৰ এটা মান (absolute value) থাকিব আৰু বলটো কোন দিশে প্ৰয়োগ কৰা হয় সেই দিশৰ ধাৰণাও লগতে থাকিব। গতিকে গণিতত বল এটা সদিশ ৰাশি। এতিয়া চিত্ৰত চোৱা আমি যদি স্থানাংক পদ্ধতি $\vec{P}$ বলটোক OP ৰেখাখণ্ডেৰে বুজাও তেন্তে $|OP|$ ইয়াত যোগাত্মক মান আৰু $\overrightarrow{OP}$ ইয়াৰ দিশ। গতিকে P অৰ্থাৎ (a, b, c) বিন্দুৰ স্থানাংকবোৰ ইয়াত মূলবিন্দু Oৰ পৰা দিশ আৰু Oৰ পৰা Pৰ দূৰত্ব অৰ্থাৎ OPৰ মান দুয়োটা কথাই বুজাব পাৰিব। সেয়ে আমি (a, b, c) ৰাশিটোৰেই $\vec{P}$ বলটো নিৰ্দেশ কৰিব পাৰো। আমি গতিকে (a, b, c)ৰে এটা ভেক্টৰ বুজাব পাৰো। সেয়ে সাধাৰণ ক্ষেত্ৰত এনে ৰাশিবোৰকে আমি ভেক্টৰ নাম দিও। যেনে আগৰ শ্ৰেণীত দিয়া ৰকেটৰ যাত্ৰাপথৰ বিন্দুবোৰ যেনে (x, y, z, t, u, F, T) একোটা ভেক্টৰ। এনেদৰে লিখা যিকোনো শাৰী বা স্তম্ভ মেট্ৰিক্স এটাই ভেক্টৰ, কাৰণ স্থানাংক সমষ্টিত এই প্ৰতিটো বিন্দুৰে এটা দিশ আৰু মান দিয়ে। অৱশ্যে উচ্চ গণিতত ভেক্টৰ এটা লিখিলেই প্ৰতি ক্ষেত্ৰতে ইয়াৰ দিশমান থকাটো বিচৰা নহয়। যদি দিশ মান বিচৰা হয় তেন্তে ভেক্টৰবোৰক অৱস্থান ভেক্টৰ (Position Vector) বোলা হয়। এইবোৰ কথা লাহে লাহে ভালদৰে বুজিবা।



অংকিত ঃ ছাৰ, যোৱা শ্ৰেণীত আমি এনে ৰাশিবোৰৰ মাজত যোগ বিয়োগ কৰিছিলো। সেই একে প্ৰক্ৰিয়াবোৰ ইয়াতো খাটিব নেকি?

ছাৰ ঃ সেইবোৰ একেই, কাৰণ সেইবোৰকো দেখোন মই ভেক্টৰ বুলিয়েই ক'লো। অৱশ্যে তাত যোগ-বিয়োগ কৰা প্ৰণালীবোৰ কি যুক্তিৰ ভিত্তিত কৰা হয় তাক আমি বহলাই ব্যাখ্যা কৰিছিলো। কিন্তু বিভিন্ন প্ৰণালীৰ কথা আমি তাত আলোচনা কৰা নাহ। আমি ইয়াত কেইটামান চমু নিয়মৰ প্ৰয়োগৰে

উদাহৰণ কেইটামান কৰিম। তোমালোকে কৰিবলৈ ভাল পাবা। নিয়মকেইটা দেখিলেই বুজি পাবা। মনত ৰাখিবা একে আকাৰৰ আৰু একে শ্ৰেণীৰ মৌলৰ মাজতহে মেট্ৰিক্স বা ভেক্টৰ দুটাৰ মাজত যোগ-বিয়োগ হয়। যি কোনো এটা আকাৰৰ ক্ষেত্ৰত তলত দিয়াৰ দৰে কৰিবা—

a) (a, b, c, d) + (p, q, r, s) = (a + p, b + q, c + r, d + s)
b) (a, b, c, d) - (p, q, r, s) = (a - p, b - q, c - r, d - s)
c) x(a, b, c, d) = (xa, xb, xc, xd)

d) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p \\ b+q \\ c+r \\ d+s \end{pmatrix}$ (সেইদৰে বিয়োগ)

e) $x \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa \\ xb \\ xc \\ xd \end{pmatrix}$

[এইবুলি ছাৰে ওপৰৰ সংজ্ঞাবোৰৰ অৰ্থ সাংখ্যিক উদাহৰণৰে বুজাই দিলে]

নীলিমা ঃ ছাৰ, এইবোৰ তেনেই উজু। আমাক দুই-চাৰিটামান কৰিব দিয়ক।

ছাৰ ঃ এইবোৰ অকল শাৰী বা স্তম্ভ মেট্ৰিক্সৰ ক্ষেত্ৰতহে লিখিছো যদিও যিকোনো আকাৰৰ ক্ষেত্ৰতেই একে। কাৰণটো চোৱা।

ধৰা এখন ক্ৰিকেট খেল। দুটা ইনিংছ A আৰু B। চাৰিজন খেলুৱৈয়ে বেট ধৰিছে। তেওঁলোকে খেলত দেখুৱা তথ্যবোৰৰ পৰা আমি পাওঁ—

খেলুৱৈ ↓	প্ৰথম ইনিংছ: ৰাণ	বাউণ্ডেৰী	ওভাৰ বাউণ্ডেৰী	দ্বিতীয় ইনিংছ: ৰাণ	বাউণ্ডেৰী	ওভাৰ বাউণ্ডেৰী
ৰাহুল	65	4	2	111	10	9
জাহিৰ	102	10	9	40	3	1
বিৰাট	11	0	1	3	0	0
মনোজ	0	0	0	91	7	5

এতিয়া মই যদি সোধো, দুয়োটা ইনিংছ মিলি ৰাহুলে কিমান ৰাণ কৰিলে, জাহিৰে কিমানটা ওভাৰ বাউণ্ডেৰী মাৰিলে ইত্যাদি প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিবলৈ কি কৰিবা?

কিশোৰ : ছাৰ, এজনৰ ৰাণৰ লগত ৰাণ, বাউণ্ডেৰীৰ লগত বাউণ্ডেৰী, ইত্যাদি এটা এটাকৈ ক্ৰম অনুসৰি শাৰীয়ে শাৰীয়ে যোগ কৰি যাম।

ছাৰ : ঠিকেই, অৰ্থাৎ বাওঁহাতৰ মেট্ৰিক্সটোক সোঁহাতৰ মেট্ৰিক্সটোৰ ওপৰত মনতে জাপি লোৱা। পিছত অনুৰূপ সংখ্যাটোৰ যোগ কৰা। প্ৰবাল, আহাচোন কৰি দেখুওৱা। আমি মন কৰিম যে দুটা বেলেগ আকাৰৰ মেট্ৰিক্সৰ মাজত যোগ-বিয়োগ প্ৰক্ৰিয়া কৰা নহয়।

প্ৰবাল : (বোৰ্ডত কৰি)

$$\begin{pmatrix} 65 & 4 & 3 \\ 102 & 10 & 9 \\ 11 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 111 & 10 & 9 \\ 40 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 91 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 65+111 & 4+10 & 3+9 \\ 102+40 & 10+3 & 9+1 \\ 11+3 & 0+0 & 1+0 \\ 0+91 & 0+7 & 0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 176 & 14 & 12 \\ 142 & 13 & 10 \\ 14 & 0 & 0 \\ 91 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

ছাৰ : এৰা, যোগ কৰা নিয়মটো এনেই। কাৰণটো বুজিলাই। একেদৰেই বিয়োগৰ নিয়মো খাটিব। পাৰিবানে?

মেঘালী : পাৰিম ছাৰ। কৰিব দিয়ক।

ছাৰ : তেন্তে দুই-চাৰিটামান কৰি অভ্যাস কৰি লোৱা।

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 6 \\ 3 & 10 & 9 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(g) $2\times\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (h) $3\times\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + 4\times\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ (i) $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 3\times\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

তলৰ কোনকেইটা কৰা সম্ভৱ নহয় ? কিয় ?
বাকীকেইটা কৰি উলিওৱা।

(j) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + (3\ 5)$ (k) $2(4\ \ 5\ \ 6\ \ 1) - (3\ \ 1\ \ 2)$

(l) $5\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (m) $2\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$

(n) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ (o) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

নীলাক্ষি ঃ ছাৰ, মোৰ (i) লৈকে কৰা হ'লেই।

ছাৰ ঃ তেনেহ'লে বাকীবোৰেও (i) লৈকে ইয়াতেই কৰা।
(ছাৰে অলপ দেৰি চকীত বহাৰ পিছত উঠি গৈ দেখিলে যে প্ৰত্যেকেই ভুল নোহোৱাকৈ কৰিছে।)
এতিয়া দেখিছো বাকীকেইটাও তোমালোকে পাৰিবাই। এইকেইটা হোমৱৰ্ক থাকিল। আজিলৈ আমাৰ সময় হৈ আহিল। কাইলৈ পুনৰ....

নিয়ৰ ঃ (চিঞৰি) ছাৰ ছাৰ...।

ছাৰ ঃ কি হ'ল!!

নিয়ৰ ঃ ছাৰ, আপুনি দেখোন আৰম্ভণিতে কথা দিছিল, গণিতৰ যাদু এটা দেখুৱাম বুলি।

ছাৰ ঃ ও, ও, হয়তো, পাহৰিছিলোয়েই। কিহৰ যাদু চাবা?

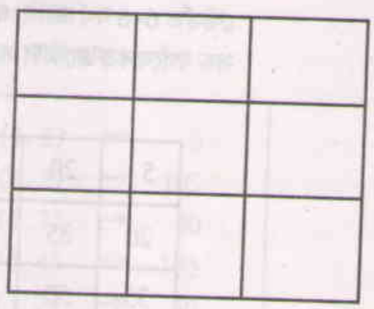
অংকিতা ঃ ছাৰ, আপুনি যিয়ে ভাল পায়।

প্ৰবাল ঃ তেনেহ'লে ছাৰ, আমি শিকি থকা মেট্ৰিক্সৰে এটা দেখুৱাওক।

ছাৰ ঃ মেট্ৰিক্সৰ কথাবোৰেই যাদু যাদু। গতিকে আমি এটা যাদুৰ মেট্ৰিক্স কৰো আহা।

নীলিমা ঃ ভালেই হ'ব ছাৰ। কিবা এটা হ'লেই হ'ল।

ছাৰ ঃ তেন্তে আহা, আমি এটা বৰ্গ মেট্ৰিক্সৰ খেল খেলো। প্ৰবাল কোৱা মই বোৰ্ডত এইটো কি আঁকিলো? (বোৰ্ডত চিত্ৰটো আঁকি দি)



প্ৰবাল ঃ এইটো 3 × 3 বৰ্গ ছাৰ।

ছাৰ ঃ তুমি ডবা খেলানে?

প্ৰবাল ঃ খেলো ছাৰ।

ছাৰ ঃ ডবাবোৰ্ডখন কিমান বৰ্গৰ? তাত কেইটা ঘৰ আছে?

প্ৰবাল ঃ 8 × 8 বৰ্গৰ ছাৰ। তাত দীঘে আঠটাকৈ আৰু পথালিয়ে আঠটাকৈ মুঠ 64 টা বৰ্গ আছে।

ছাৰ ঃ বাৰু, মই তোমালোকক এইখিনিতে এটা সাঁথৰ দিলো, ডবাবোৰ্ডখনত সৰু ডাঙৰ সকলো মিলি মুঠ কেইটা বৰ্গ আছে ঘৰত কৰি চাবা। যিয়েই শুদ্ধকৈ কৰি আনিব পাৰা তেওঁক মই এটা পুৰস্কাৰ দিম।

বাৰু সেইটো বেলেগ কথা। এতিয়া নিয়ৰ! তুমি থিয় হৈ মোক যিকোনো আকাৰৰ বৰ্গ এটা আঁকিবলৈ কোৱা।

নিয়ৰ ঃ ছাৰ সৰু নে ডাঙৰ?

ছাৰ ঃ বোৰ্ডত জুৰাকৈ যি কোনো সৰু বা ডাঙৰ।

নিয়ৰ ঃ তেন্তে 6 × 6 এটাকে আঁকক।

ছাৰ ঃ (6 × 6 আকাৰৰ বৰ্গ এটা বোৰ্ডত আঁকিলে) এতিয়া হ'লনে? বাৰু মোক আৰু এটা বস্তু লাগে। বস্তুটো হ'ল যিকোনো এটা সংখ্যা। কোনে কবা?

নিপুকণ ঃ (উঠি) ময়েই কও ছাৰ। কিমান ডাঙৰ?

ছাৰ ঃ ডাঙৰ সৰু যি কোনো। একৰ পৰা হেজাৰ, লাখ, নিযুত, কোটি, দ্বিনিযুতলৈকে যিকোনো। কাৰণ জগতত সংখ্যাৰ অভাৱ নাই। কিন্তু তুমি ভাল পোৱা আৰু আমাৰ সময়লৈ চাই যিকোনো এটা কোৱা।

নিপুকণ ঃ ছাৰ 365 কে ক'লো, কাৰণ ই বছৰটোৰ দিন সংখ্যা, তাৰোপৰি আমাৰ বিদ্যালয়ত মুঠ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ সংখ্যাও 365।

ছাৰ ঃ ভাল কথা। হ'ব বাৰু।

(এই বুলি ছাৰে 365 টো বোৰ্ডৰ ওপৰত ডাঙৰকৈ লিখি থ'লে)

এতিয়া তোমালোকে অলপ দেৰি মই দিয়া সাঁথৰটোৰ উত্তৰটো কৰিবলৈ চেষ্টা কৰা। মই ইতিমধ্যে দুই-তিনিমিনিট মান সময় লৈছো।

(ছাত্ৰ-ছাত্ৰীহঁতে 8 × 8 বৰ্গৰ সমস্যাটো চেষ্টা কৰিব লাগিল। ছাৰে বোৰ্ডত 6×6 বৰ্গ জালি এখন আঁকি আৰু মনতে কিবা এটা হিচাপ কৰি সৰু বৰ্গবোৰত একোটা সংখ্যা বহুৱাই গ'ল চিত্ৰত দিয়া ধৰণে)

< 365 >

5	20	25	75	25	10
20	35	40	90	40	25
35	50	55	105	55	40
85	100	105	155	105	90
55	70	75	125	75	60
35	50	55	105	55	40

এতিয়া তোমালোকৰ বৰ্গত মোৰ মেট্ৰিক্স তালিকা এখন বনোৱা হ'ল। বৰ্গটো তোমালোকে কোৱাৰ দৰেই 6 × 6 বৰ্গৰ। এতিয়া তোমালোকে এজন এজনকৈ উঠি মোক একোটা সংখ্যা দেখুৱাবা, তালিকাৰ পৰা, যেনে পঞ্চম শাৰীৰ দ্বিতীয় স্তম্ভত থকা সংখ্যা 70। তোমালোকে অৱশ্যে 70 বুলি স্থানাংক পদ্ধতিৰেও ক'ব পাৰা। যেনে (5, 2) সংখ্যাটো। তেতিয়া আমাৰ বুজাত সহজ হ'ব। তুমি যদি কোৱা (4, 6) মই বুজিম যে চতুৰ্থ শাৰীৰ 6 নং স্তম্ভত থকা সংখ্যাটো, অৰ্থাৎ 90। এতিয়া ক'বলৈ আৰম্ভ

কৰা। তোমালোকে সংখ্যা এটা কোৰাৰ পিছত মই সেই সংখ্যাটোৰ মাজেৰে যোৰা শাৰী আৰু স্তম্ভ দুটা কাটি পেলাম। পিছৰজনে বাকী ৰোৱা সংখ্যাবোৰৰ পৰাহে ক'ব পাৰিবা। ও, এতিয়া আৰম্ভ কৰা।

ময়ূৰ : ছাৰ (1, 1) সংখ্যাটো মই ধৰিছো।

ছাৰ : নীলাক্ষি, তুমি বোৰ্ডলৈ আঁহা। এওঁলোকে কোৱা সংখ্যাবোৰ এটাৰ তলত এটাকৈ বোৰ্ডত লিখি থাকা। যাদুটো হ'ল এই যে, যিয়ে যি সংখ্যাকে নধৰা কিয় শেষত আটাইবোৰ যোগ কৰিলে উত্তৰটো নিপনে আগতে কোৱা ৩৬৫ ওলাব।

নীলাক্ষি : সঁচাই নে ছাৰ! মই বোৰ্ডলৈ যাও। পিছে ময়ো এটা কম। মই ক'লো (4, 5)।

ছাৰ : কোৱা বাৰু, এটা এটাকৈ লিখি যোৱা।
(ছাৰে শাৰী স্তম্ভবোৰ লগে লগে কাটি যায়।

ময়ূৰ	:	(1, 1)	→	5
নীলাক্ষি	:	(4, 5)	→	105
নয়ন	:	(2, 3)	→	40
অংকিতা	:	(5, 4)	→	125
কংকন	:	(3, 2)	→	50
নীলিমা	:	(6, 6)	→	40
		+		365

নয়ন : মই ক'লো (2, 3)

অংকিতা : ছাৰ (5, 4)

কংকণ : ছাৰ (3, 2)

ছাৰ : আৰু মাত্ৰ এটাহে বাকী আছে (6, 6), সেইটোও লিখিব লাগিব।

নীলিমা : ছাৰ, মই ক'লো (6, 6)।

ছাৰ : নীলাক্ষি, এতিয়া আটাইবোৰ সংখ্যা যোগ কৰা।

নীলাক্ষি : (যোগ কৰি) হয় ছাৰ; সঁচাকৈ, কি আচৰিত!

ছাৰ : এয়াই যাদু।

আটায়ে : কেনেকৈ কেনেকৈ হ'ল ছাৰ। আমাকো শিকাই দিয়ক ছাৰ।

কৰা। তোমালোকে সংখ্যা এটা কোৱাৰ পিছত মই সেই সংখ্যাটোৰ মাজেৰে যোৱা শাৰী আৰু স্তম্ভ দুটা কাটি পেলাম। পিছৰজনে বাকী ৰোৱা সংখ্যাবোৰৰ পৰাহে ক'ব পাৰিবা। ও, এতিয়া আৰম্ভ কৰা।

ময়ূৰ ঃ ছাৰ (1, 1) সংখ্যাটো মই ধৰিছো।

ছাৰ ঃ নীলাক্ষি, তুমি বোৰ্ডলৈ আঁহা। এওঁলোকে কোৱা সংখ্যাবোৰ এটাৰ তলত এটাকৈ বোৰ্ডত লিখি থাকা। যাদুটো হ'ল এই যে, যিয়ে যি সংখ্যাকে নধৰা কিয় শেষত আটাইবোৰ যোগ কৰিলে উত্তৰটো নিপনে আগতে কোৱা ৩৬৫ ওলাব।

নীলাক্ষি ঃ সঁচাই নে ছাৰ! মই বোৰ্ডলৈ যাও। পিছে ময়ো এটা কম। মই ক'লো (4, 5)।

ছাৰ ঃ কোৱা বাৰু, এটা এটাকৈ লিখি যোৱা।
(ছাৰে শাৰী স্তম্ভবোৰ লগে লগে কাটি যায়।

ময়ূৰ	ঃ	(1, 1)	→	5
নীলাক্ষি	ঃ	(4, 5)	→	105
নয়ন	ঃ	(2, 3)	→	40
অংকিতা	ঃ	(5, 4)	→	125
কংকন	ঃ	(3, 2)	→	50
নীলিমা	ঃ	(6, 6)	→	40
			+	365

নয়ন ঃ মই ক'লো (2, 3)

অংকিতা ঃ ছাৰ (5, 4)

কংকণ ঃ ছাৰ (3, 2)

ছাৰ ঃ আৰু মাত্ৰ এটাহে বাকী আছে (6, 6), সেইটোও লিখিব লাগিব।

নীলিমা ঃ ছাৰ, মই ক'লো (6, 6)।

ছাৰ ঃ নীলাক্ষি, এতিয়া আটাইবোৰ সংখ্যা যোগ কৰা।

নীলাক্ষি ঃ (যোগ কৰি) হয় ছাৰ ; সঁচাকে, কি আচৰিত!

ছাৰ ঃ এয়াই যাদু।

আটায়ে ঃ কেনেকৈ কেনেকৈ হ'ল ছাৰ। আমাকো শিকাই দিয়ক ছাৰ।

নয়ন ঃ ছাৰ, আৰু এটা কৰি চাও।

ছাৰ ঃ ৰ'বা, আজি পিছে নহয়, বহুত দেৰি হ'ল। পিছলৈ কেতিয়াবা আকৌ এনে ধেমালি কৰিম।

নিয়ৰ ঃ আমাক কিন্তু আৰু এনে যাদু দেখুৱাব লাগিব। শিকায়ো দিব লাগিব।

ছাৰ ঃ হ'ব বাৰু। গুড নাইট।

সকলোৱে ঃ ধন্যবাদ ধন্যবাদ ছাৰ ; গুড নাইট।

* * * * * * *

পঞ্চম দিন

নাহৰ, চেগুণ, বিশ্বপৰিবেশ আৰু আইচক্ৰীম

।। পিছৰ ৰাতিপুৱা। ন-মান বজাতেই শুকুলা মেঘৰ ফাকে ফাকে আহি পুৱাৰ সূৰুযৰ ৰদালিয়ে সোণালী ৰঙীণ ফাকুগুৰিৰ দৰে চটিয়াই থকা আভাকণ হঠাতে দেখোন কলীয়া দৈত্য আন্ধাৰৰ দৰে কলা মেঘে গিলি পেললে। জাক জাক শিলৰ টোপালৰ দৰে আৰম্ভ কৰি কলীয়া ডাৱৰে ধুমুহা বজ্ৰ নিনাদৰ মাজতে মুকুতা সদৃশ বৰষুণৰ টোপাল সিচিবলৈ আৰম্ভ কৰিলে। ল'ৰা-ছোৱালীজাকে দৌৰি, দৌৰি নগুৰ-নাকটি হৈ কোনোমতে বিদ্যালয়ৰ বাৰান্দাত বাৰিষাৰ বান ভেকুলীৰ দৰে জপিয়াই পৰিল। বেদান্ত ছাৰে আকৌ মূল ৰাস্তাতে চাইকেলৰ পৰা নামিল যদিও মূৰৰ ওপৰৰ ছাটিটোৰ আকৃতি S অক্ষৰটোৰ দৰে হ'ল। কিশোৰে দৌৰি গৈ ছাৰৰ হাতৰ পৰা ছাতি-চাইকেল কাঢ়ি আনি কমন ৰুমত থোৱাই দিলে। অলপ পিছত ছাৰ মুখ হাত মচি সুস্থিৰ হোৱাৰ পিছত লাহে লাহে শ্ৰেণীলৈ আহিল।।

ছাত্ৰ-ছাত্ৰী ঃ গুডমৰ্ণিং ছাৰ। নমস্কাৰ।

ছাৰ ঃ নমস্কাৰ। এতিয়া অৱশ্যে মৰ্ণিংটো লাহে লাহে 'গুড' হৈ আহিব ধৰিছে।

ময়ূৰ ঃ পিছে হ'লেও ছাৰ, আজি সিমান এটা গণিত কৰাৰ পৰিবেশ নহয়।

ছাৰ ঃ কি কৈছা! গণিতৰ একো পৰিবেশ নাই। বেলি, গৰম, বতাহ, ধুমুহা এই কোনো পৰিবেশৰ লগতে গণিতৰ সম্পৰ্ক নাই। মনোযোগ এবাৰ দিয়া— দেখিবা যে জগতখন তোমাৰ ভৰিৰ তলৰ পৰা কেতিয়া পিছলি আঁতৰি গ'ল, তুমি গমকেই নাপাবা।
আজি পিছে আমি কি কৰিম বুলি ভাবিছিলা?

মেঘালী ঃ ছাৰ যোৱাকালি আমি ভেক্টৰ আৰু ইয়াৰ যোগ-বিয়োগ আদি শিকিছিলো।

লগতে আপুনি আমাক কেইটামান অনুশীলনী কৰিবলৈ দিলে।

ছাৰ : তোমালোক আটায়ে কৰিলানে?

আটায়ে : কৰিলো ছাৰ।

ছাৰ : তেন্তে আঁহা, আজি আমি দুটা ভেক্টৰ লগ লগোৱা এবিধ 'ভেক্টৰ গুণন' নামৰ প্ৰক্ৰিয়াৰ কথা আলোচনা কৰো। প্ৰথমে মই ইয়াৰ সংজ্ঞাটো লিখি দিছো, চোৱা (বুলি ছাৰে লিখে)।

সংজ্ঞা : দুটা ভেক্টৰ গুণন :

A আৰু B দুটা একে দৈৰ্ঘ্যৰ শাৰী আৰু স্তম্ভ ভেক্টৰ। তেন্তে

$$AB = (a\ \ b\ \ c\ \ d) . \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} = ap + bq + cr + ds$$

অৰ্থাৎ ইহঁত দুটাৰ গুণফল এটা একে ধৰণৰ মৌল।

যেনে (i) $(2\ \ 1\ \ 3) . \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 2.4 + 1.5 + 3.2 = 19$

ইয়াত A ভেক্টৰটোৰ আকাৰ 1×3 আৰু B ভেক্টৰটোৰ আকাৰ 3×1। প্ৰকৃততে এটা $1 \times m$ আৰু $m \times 1$ আকাৰৰ দুটা ভেক্টৰৰ মাজতহে এনে গুণফল সংজ্ঞা দিয়া হয়। বেলেগ আকাৰ বা বেলেগ দৈৰ্ঘ্যৰ ভেক্টৰৰ মাজত এনে গুণফল নাই।

এই সংজ্ঞামতে B আৰু Aৰ গুণফল পাব নোৱাৰি।

যেনে, $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} . (2\ \ 1\ \ 3)$ গুণফলৰ মান নাথাকে।

তেনেদৰে $(2\ \ 1\ \ 3\ \ 4) . \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ৰো মান নাই।

প্ৰবাল ঃ ছাৰ, আমিও এনে দুটামান কৰিব পাৰোনে চাওঁ।

ছাৰ ঃ বাৰু তলৰ উদাহৰণকেইটা কৰা।

(1) $(3\ \ 1)\cdot\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ (2) $(2\ \ 0\ \ 1)\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}$

(3) $(3\ \ 2\ \ 1\ \ 5)\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\1\\2\end{pmatrix}$ (4) $(-3\ \ 1\ \ \frac{1}{2})\cdot\begin{pmatrix}-5\\2\\8\end{pmatrix}$

(5) তলৰ উদাহৰণকেইটাৰ গুণফল আছে নে নাই? যদি আছে উলিওৱা। যদি নাই কিয়?

(i) $\begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix}(5\ \ 2\ \ 7)$ (ii) $(3\ \ 1\ \ 4\ \ 5\ \ 6)\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\\3\\-1\end{pmatrix}$

(iii) $(2\ \ 4\ \ 6)\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\0\\-2\end{pmatrix}$ (iv) $(1)\,(3)$ (v) $(4\ \ 1).(5)$

(ছাত্ৰ-ছাত্ৰী আটায়ে প্ৰশ্ন (1)ৰ পৰা (4) লৈকে কৰিলে। কিন্তু (5) প্ৰশ্নটোৰ উত্তৰবোৰ মাত্ৰ দুজনমানৰ বাহিৰে আটায়ে ভুল কৰিলে।)

ছাৰ ঃ প্ৰবাল, তোমাৰ মতে উত্তৰবোৰ কি?

প্ৰবাল ঃ ছাৰ, প্ৰশ্ন 5ৰ (ii) আৰু (iv)তহে মাত্ৰ গুণফল আছে। (i)ৰ প্ৰথমটো

ভেক্টৰ স্তম্ভ ভেক্টৰ। সেয়ে গুণফল নাই। (iii) ৰ দ্বিতীয়টো ভেক্টৰৰ মৌল সংখ্যা 4, অৰ্থাৎ দুয়োটাক দৈৰ্ঘ্য একে নহয়। প্ৰথমটোৰ আকাৰ 1×3 আৰু দ্বিতীয়টোৰ আকাৰ 4×1, দ্বিতীয়টো 3×1 হ'ব লাগিছিল। আকৌ (v)ৰ ক্ষেত্ৰতো কথাটো একেই।

ছাৰ ঃ নমিতা, তুমি (iv)ৰ উত্তৰ কি পালা?

নমিতা ঃ মই কৰা নাই ছাৰ। বোধহয় (1×3) হ'ব।

ছাৰ ঃ নীলাক্ষি, নমিতাই ভবাটো শুদ্ধনে?

নীলাক্ষি ঃ নহয় ছাৰ, সংখ্যা 1×3, অৰ্থাৎ অকল 3 হে হ'ব। ভেক্টৰ নহয়।

ছাৰ ঃ বঢ়িয়া, কাৰণ ইয়াত ভেক্টৰ দুয়োটা 1×1 আকাৰৰ আৰু দুটা ভেক্টৰৰ গুণফল এটা মৌলহে, ভেক্টৰ নহয়। এতিয়া মই তোমালোকক এই ভেক্টৰ গুণফলৰ এটা প্ৰয়োগ শিকাও, চোৱা।

ধৰা নমিতা এদিন বজাৰলৈ গ'ল। তেওঁ 8 টা চকলেট, 6টা কমলা, 4টা আইচক্ৰীম আৰু 3 পেকেট বিস্কুট কিনে। চকলেট এটাৰ দাম 5 টকা, কমলা এটাৰ দাম 4 টকা, আইচক্ৰীম এটাৰ দাম 12 টকা আৰু বিস্কুট এটাৰ দাম 11 টকা। নমিতাই সিদিনা বজাৰত মুঠ কিমান খৰচ কৰে? ভেক্টৰৰ সহায়ত কৰা।

নিপুকণ ঃ ছাৰ মই যদি বস্তুবোৰৰ পৰিমাণ এটা ভেক্টৰত লিখো আৰু এইবোৰৰ দামবোৰ অনুক্ৰমে এটা ভেক্টৰত লিখো তেন্তে পূৰণ কৰিলে হ'ব যেন পাওঁ।

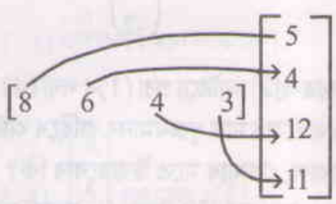
নমিতা ঃ ছাৰ এটা ভেক্টৰ শাৰীত আৰু এটা ভেক্টৰ স্তম্ভত লিখিলেহে গুণফল পোৱা যাব।

মেঘালী ঃ কিন্তু ছাৰ যেনেতেনেকে লিখিলে দেখোন দামবোৰ নোলাব।

নিপুকণ ঃ মই যেনেতেনেকৈ লিখিব কোৱা নাই নহয়। বস্তুৰ অনুক্ৰমে দাম।

ছাৰ ঃ আহা, বোৰ্ডত কৰি দিয়া।

নিপুকণ ঃ (বোৰ্ডত কৰি)



চিত্ৰ ঃ বস্তুৰ অনুক্ৰমে দামৰ পূৰণ

$$\begin{matrix} \text{চকলেট} & \text{কমলা} & \text{আইচক্ৰীম} & \text{বিস্কুট} \\ (8 & 6 & 4 & 3) \end{matrix} \overset{\text{দাম}}{\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 12 \\ 11 \end{bmatrix}}$$

$= 8 \times 5 + 6 \times 4 + 4 \times 12 + 3 \times 11$

$= 145$ টকা

ছাৰ ঃ অতি ভাল। চোৱা, আলোচনাৰ মাজেৰেই তোমালোকে নিজে নিজে সমস্যাটো ভাঙিলা। আটাইকে ধন্যবাদ। বাৰু, সমস্যাটো আটায়ে বুজিলানে? চিত্ৰটো চোৱা।

আটায়ে ঃ বুজিছো ছাৰ।

ছাৰ ঃ তেন্তে একেধৰণে চিন্তা কৰি তলৰ সমস্যাটোও ভেক্টৰ বা মেট্ৰিক্সৰ সহায়ত কৰা। ইয়াৰ প্ৰৰা তোমালোকে জানিবা মেট্ৰিক্স দুটাৰ গুণফল কি আৰু কোন দুটা মেট্ৰিক্সৰ মাজতহে গুণফল সম্ভৱ।

নীলিমা ঃ ছাৰ আমি যিকোনো আকাৰৰ মেট্ৰিক্সৰ যোগ-বিয়োগৰ কথায়ে শিকা নাই।

ছাৰ ঃ চিন্তা নকৰিবা। ভেক্টৰৰ দৰে সম্পূৰ্ণ একে। মেট্ৰিক্সৰ প্ৰতিটো শাৰীকে একোটা ভেক্টৰ বুলি ভাবিলেই হ'ল। পিছত কৰিবা বাৰু। এতিয়া প্ৰথমে মোৰ সমস্যাটো শুনা—

আমাৰ বিদ্যালয়ত এইবাৰ বিশ্ব পৰিবেশ দিবস পাতিছো। গছৰ পুলি বিদ্যালয়ৰ চৌপাশে ৰুবলৈ যো-জা কৰিছো। ধৰা তোমালোকৰ পাঁচজনে তিনিবিধ গছ পুলি আনিছা এনেদৰে (সংখ্যাত)

গছ→ ছাত্ৰ ↓	নাহৰ ↓	চেগুন ↓	শিমলু ↓
ৰঞ্জন	5	3	2
ময়ূৰ	3	4	3
নয়ন	1	5	4
দীপালী	4	2	4
বৰ্ণালী	2	5	3

গছপুলি একোটাৰ দাম আৰু ওজন এনেকুৱা—

দাম (টকাত) ওজন (কিলোত)

$$\begin{matrix} \text{নাহৰ} \\ \text{চেগুণ} \\ \text{শিমলু} \end{matrix} \begin{bmatrix} 8 & \frac{1}{2} \\ 7 & 1 \\ 3 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

এতিয়া প্ৰতিজনে পুলি অনুপাতে কৰা খৰচ আৰু মুঠ ওজন দেখুওৱা।

এতিয়া আমি এই প্ৰশ্নৰ সমাধান কৰোতে অলপ দকৈ চিন্তা কৰি চাম। আমি ওপৰৰ মেট্ৰিক্সটোৰ প্ৰতিটো সংখ্যাই যি বুজাইছে সেই অনুসৰি দাম আৰু ওজনৰ লগত পূৰণ কৰি দেখুৱাব পাৰিলেই হ'ল। সেইকাৰণে আমি দুয়োটা মেট্ৰিক্স এইদৰে বোৰ্ডত যদি পাতি লও (ছাত্ৰে বোৰ্ডত আঁকি দেখুৱায়) আৰু বস্তু অনুসৰি দামবোৰ আৰু ওজনবোৰ পূৰণ কৰি লও তেন্তে প্ৰশ্নত বিচৰা ধৰণে কথাবোৰ দেখুৱাব পাৰিম, চোৱা।

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & \frac{1}{2} \\ 7 & 1 \\ 3 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5\times8+3\times7+2\times3 & 5\times\frac{1}{2}+3\times1+2\times\frac{1}{4} \\ 3\times8+4\times7+3\times3 & 3\times\frac{1}{2}+4\times1+3\times\frac{1}{4} \\ 1\times8+5\times7+4\times3 & 1\times\frac{1}{2}+5\times1+4\times\frac{1}{4} \\ 4\times8+2\times7+4\times3 & 4\times\frac{1}{2}+2\times1+4\times\frac{1}{4} \\ 2\times8+5\times7+3\times3 & 2\times\frac{1}{2}+5\times1+3\times\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 67 & 6 \\ 61 & 6.25 \\ 55 & 6.5 \\ 58 & 5 \\ 60 & 6.75 \end{pmatrix}$$

ওপৰৰ মেট্ৰিক্স দুটাৰ গুণফলটো কিদৰে কৰিছো তোমালোকে বুদিছাই। প্ৰকৃততে প্ৰথমটোৰ প্ৰথম শাৰীক এটা শাৰী মেট্ৰিক্স আৰু দ্বিতীয়টোৰ প্ৰথম স্তম্ভক এটা স্তম্ভ মেট্ৰিক্স হিচাপে ধৰি আগৰ দৰে গুণফল কৰি গুণফল মেট্ৰিক্সটোৰ প্ৰথম শাৰীৰ প্ৰথম সংখ্যাটো লিখা হৈছে। সেইদৰে বাকী স্তম্ভ বা শাৰীবোৰক লৈ পূৰণফলবোৰ নিজৰ নিজৰ স্থানত লিখি যোৱা হৈছে। তোমালোকে ভাবি চোৱা, আমি কৰা পূৰণবোৰৰ নিয়মটো অৰ্থপূৰ্ণ হৈছে নে নাই।

নীলাক্ষি ঃ ছাৰ, অৰ্থপূৰ্ণ হৈছে। কাৰণ প্ৰথম শাৰীৰ প্ৰথম স্তম্ভৰ পূৰণটো অৰ্থাৎ $5 \times 8 + 3 \times 7 + 2 \times 3$য়ে নাহৰৰ মুঠ দাম + চেগুনৰ মুঠ দাম + শিমলুৰ মুঠ দাম, অৰ্থাৎ 67 টকা। সেইদৰে ...

ছাৰ ঃ বাৰু বাৰু হ'ব হ'ব। এতিয়া মেঘালীয়ে কোৱা, সোঁহাতৰ $4 \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 + 4 \times \frac{1}{4}$ পূৰণটোৱে কি বুজাইছে?

মেঘালী ঃ ছাৰ $4 \times \frac{1}{2}$য়ে বুজাইছে 4 জোপা নাহৰৰ ওজন,

সেইদৰে 2×1য়ে বুজাইছে 2 জোপা চেগুনৰ ওজন। আৰু $4 \times \frac{1}{4}$য়ে বুজাইছে 4 জোপা শিমলুৰ ওজন। অৰ্থাৎ গোটেই যোগফলটোৱে আটাইকেইজোপা গছৰ ওজন বুজাইছে।

ছাৰ ঃ এই গছকেইজোপা কোনে আনিছিল?

নীলিমা ঃ দীপালী নামৰ ছোৱালী জনীয়ে।

ছাৰ ঃ অতি শুদ্ধ উত্তৰ। এতিয়া আমাৰ গোটেই প্ৰশ্নটোৰ উত্তৰ কোনে দিব পাৰিবা?

নিপুকণ : ছাৰ মই চেষ্টা কৰো। (ঠিয় হৈ কৈ যায়)
ৰঞ্জনৰ খৰছ 67 টকা, গছৰ ওজন 6 কিলোগ্ৰাম
ময়ূৰৰ খৰছ 61 টকা, গছৰ ওজন 6.25 কিলোগ্ৰাম
নয়নৰ খৰছ 55 টকা, গছৰ ওজন 6.5 কিলোগ্ৰাম
দীপালীৰ খৰছ 58 টকা, গছৰ ওজন 5 কিলোগ্ৰাম আৰু
বৰ্ণালীৰ খৰছ 60 টকা, গছৰ ওজন 6.75 কিলোগ্ৰাম

ছাৰ : বাহ্ বাহ্। বঢ়িয়া। অতি সুন্দৰ। মই বুজিছো, তোমালোকে সুন্দৰকৈ মোক অনুসৰণ কৰিব পাৰিছা। এতিয়া মই তোমালোকক ঘৰত কৰিবৰ কাৰণে কেইটামান মেট্ৰিক্সৰ গুণন আৰু এটা ওপৰৰ দৰে কথা-প্ৰশ্ন দিম। আটায়ে কৰি আনিবা।

আটায়ে : দিয়ক ছাৰ। আমি পাৰিম।

ছাৰ : এটা কথা, মন কৰিবা যে একে আকাৰৰ হ'লেও যি কোনো দুটা মেট্ৰিক্সৰে গুণফল পাব নোৱাৰি। যদি A, B দুটা মেট্ৰিক্স তেন্তে Aৰ আকাৰ $m \times n$ হ'লে Bৰ আকাৰ $n \times p$ হ'ব লাগিব ; অৰ্থাৎ Aৰ স্তম্ভৰ সংখ্যা B শাৰীৰ সংখ্যাৰ সমান হ'লেহে আমি A. আৰু B.ৰ গুণফল পাব পাৰিম। ইয়াত A.B.ৰ আকাৰ কি হ'ব? প্ৰকৃততে A.B.ৰ আকাৰ হ'ব $m \times p$। এটা কৰি চোৱা। প্ৰকৃততে A.B. পালেও কেতিয়াবা আমি B.A. নাপাবও পাৰো। কথাটো মই কিয় ক'লো তোমালোকে যিকোনো দুটা A আৰু B মেট্ৰিক্স ধৰি চিন্তা কৰি আলোচনা কৰি চোৱা। বাৰু এতিয়া তলৰ গুণফলবোৰ কৰি চোৱা।

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

(3) $(3 \ 1 \ 6 \ 2) \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & l \\ y & m \\ z & n \end{pmatrix}$

(9) তলৰ কোনকেইটা গুণফল সম্ভৱ বা কিয় অসম্ভৱ?

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

(10) খালী ঠাই (•) পূৰণ কৰা।

(i) $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = |3 \ 1 \ 6|$ ইয়াৰ পৰা কি বুজিলা?

(11) গুৱাহাটীৰ এখন গাড়ী পাৰ্কিং ঠাইত তলত দিয়াৰ দৰে গাড়ী কিছুমান আছে। প্ৰতিবিধ গাড়ীৰ আকৌ দাম অনুসৰি পাঁচোটাকৈ বিভিন্ন শ্ৰেণীত A, B, C, D, E শ্ৰেণী অনুসৰি দামবোৰ তলৰ Q মেট্ৰিক্সটোত দিয়া আছে।

প্ৰতিবিধ গাড়ীৰে কোন শ্ৰেণীৰ কিমান মূল্যৰ গাড়ী সেই ঠাইত আছে, বুজিব পৰাকৈ এটা মেট্ৰিক্স গঠন কৰা।

(গাড়ীৰ শ্ৰেণী)	A	B	C	D	E
মাৰুটি—	3	2	1	5	7
চেণ্ট্ৰো—	0	0	3	6	5
টাটা—	2	1	0	4	3

দাম (লাখত)

$$Q = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 13 \\ 10 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

আজিলৈ চুটি। বাকীবোৰ কাইলৈ ঘৰত কৰি লৈ আহিবা. গুড নাইট। অ', মই ক'বলৈ পাহৰিছিলো। কাইলৈ আটায়ে কাটা কম্পাচ, কেচি বা ব্লেড, স্কেল আৰু দুখিলাকৈ A-4 কাকত লৈ আনিবা। আমি কিবা হাতে কাম কৰিম। গুড নাইট্।

আটায়ে ঃ গুড নাইট্ ছাৰ!!

* * * * * * *

ষষ্ঠ দিন

প্ৰতিৰূপ, কেৰমবোৰ্ড আৰু অশ্বাৰোহী সৈন্য

পিছদিনা দহ বজাৰ লগে লগেই বেদান্ত ছাৰ শ্ৰেণীলৈ সোমাই আহিল। ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলৰ পৰা সম্ভাষণ গ্ৰহণ কৰি ক'লে—

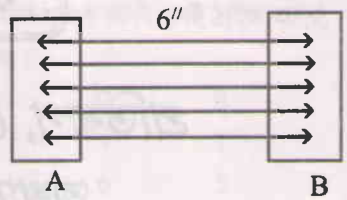
বেদান্ত ছাৰ ঃ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীহঁত! তোমালোকে জ্যামিতি, স্থানাংক জ্যামিতি আৰু বীজগণিতৰো সাধাৰণ ধাৰণাবোৰ এতিয়ালৈকে পাই আহিছা। স্থানাংক জ্যামিতিৰ উদ্ভাৱক ফৰাচী গণিতজ্ঞ ৰিনি ডেকাৰ্টে (Descartes, Rene 1596-1630) দেখুৱাইছিল যে প্ৰত্যেক জ্যামিতিক ফলকেই বীজগণিতীয় ধাৰণাৰে ব্যাখ্যা কৰিব পাৰি। ইয়াৰ ফলত জ্যামিতিক ফলবোৰ বেছি সম্যক আৰু স্পষ্ট হৈ পৰে। বিপৰীতভাৱে বীজগণিতীয় ফলৰ অৰ্থ একোটাও বহু ক্ষেত্ৰতে জ্যামিতিক বৰ্ণনাৰে অধিক স্পষ্ট হোৱা দেখা যায়। আনহাতে জ্যামিতিক বিভিন্ন ধাৰণাক আকৌ সংখ্যাৰ ভাষাৰে বৰ্ণোৱা হয়। যেনে ৰেখাখণ্ড এটাৰ লম্বটো ৰেখাখণ্ডটোক 90^0 ঘূৰ্ণনৰ ফলত পোৱা ৰেখা। দেখা যায় যে বিভিন্ন জ্যামিতিক প্ৰক্ৰিয়া, বীজগণিতীয় প্ৰক্ৰিয়া আৰু অংকীয় প্ৰক্ৰিয়া (arithmetrical operations) বোৰৰ মাজত আন্তৰিক সম্বন্ধ আছে।

আজি আমাৰ উদ্দেশ্য এনে ধৰণৰ প্ৰক্ৰিয়া কিছুমানৰ কথা আলোচনা কৰাটো।

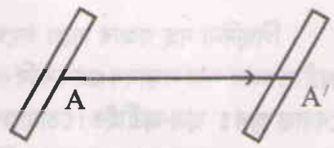
নীলিমা, কোৱাচোন এতিয়ালৈ তোমালোকে কি কি প্ৰক্ৰিয়া পাইছা।

নীলিমা ঃ ছাৰ, সংখ্যাৰ যোগ, বিয়োগ, পূৰণ, হৰণ, বৰ্গীকৰণ, বৰ্গমূল, ভেক্টৰ-মেট্ৰিক্সৰ যোগ-বিয়োগ, পূৰণ, গুণক আদি।

ছাৰ ঃ ঠিকেই কৈছা। সংখ্যা বা ভেক্টৰ মেট্ৰিক্স আদিৰ দৰে বিভিন্ন গাণিতিক মৌলৰ ওপৰত কৰা এনেবোৰ কাৰ্যই প্ৰক্ৰিয়া। এই বিশেষ প্ৰক্ৰিয়াবোৰক আমি সংক্ৰিয়া বুলিও কৈছিলো। আজি পিছে আমি কেৱল কিছুমান বিশেষ ধৰণৰ প্ৰক্ৰিয়াৰ কথাহে কম। যেনে ধৰা বোৰ্ডখন বা সমতলৰ ওপৰত এটা বস্তুক ইঠাইৰ পৰা ছয় ইঞ্চি আঁতৰৰ সিঠাইলৈ নিলো (চিত্ৰ আঁকি)। তেন্তে এই প্ৰক্ৰিয়াটোক বোলা হয় সঞ্চাৰণ বা স্থানান্তৰণ (Translation)। ইয়াত বস্তুটোৰ আটাইবোৰ বিন্দুৰে যাত্ৰাপথ সমান্তৰাল হ'ব। অৰ্থাৎ একেটা দিশত গতি কৰিব।

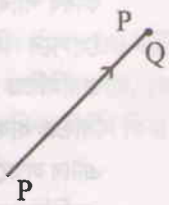


যেনে ধৰা মই এই স্কেলপাত A বিন্দুৰ পৰা A' বিন্দুলৈ AA' দিশত স্থানান্তৰ কৰিলো।

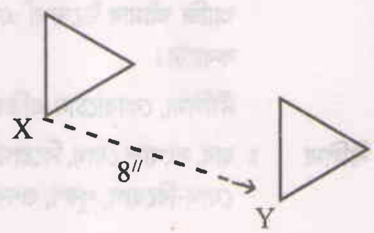


তোমালোকেও প্ৰত্যেকে নিজৰ পেন বা পেঞ্চিলবোৰ কোনো এটা নিৰ্দিষ্ট দিশত স্থানান্তৰ কৰি চোৱা। মন কৰা যে মোৰ স্কেলপাত নিজেই আগৰ অৱস্থানৰ সমান্তৰাল হৈ থাকিল।

একেদৰে যিকোনো এটা বিন্দু Q লোৱা। এতিয়া P অক্ষৰটো PQ দিশত PQ দূৰত্বলৈ স্থানান্তৰ কৰিব লাগে। কোনে কৰিবা?



নিপুকণ ঃ মই কৰিম ছাৰ।
(বুলি বোৰ্ডলৈ আহি এইদৰে আঁকে)



ছাৰ ঃ হৈছে। এতিয়া এই ত্ৰিভুজটোক XY দিশত 8″ দূৰত্বলৈ স্থানান্তৰ কৰা।

নিপুকণ ঃ (আঁকি) ছাৰ, মই আগৰ সমান্তৰালকৈ বাহুবোৰ এনেদৰে আঁকো যাতে ত্ৰিভুজটোৰ প্ৰতিটো বিন্দুৱে XY দিশত আগৰ স্থানৰ পৰা ৪″ দূৰত্বলৈ যায়।

ছাৰ ঃ ভেৰি গুড। এইবাৰ ৰঞ্জন আহা ;
হাতত এখন কিতাপ লৈ আহিবা। (ৰঞ্জন আহে)

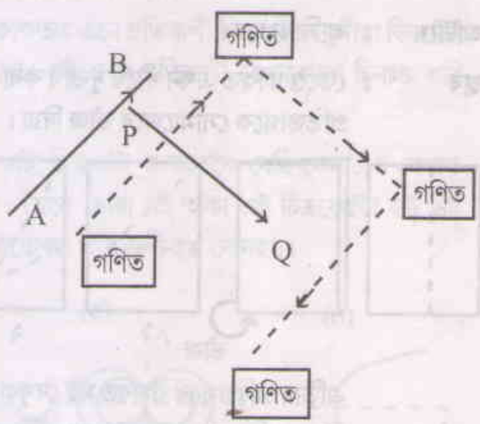
মই বোৰ্ডত দুটা দিশ আঁকি দিছো। $\overline{AB}$ আৰু $\overline{PQ}$। তুমি কিতাপখন দিশ দুটাৰ মাজত লোৱা।

(ছাৰে ঠিক কৰি দিয়ে)

ধৰি থাকিবা আৰু মই কোৱাৰ দৰে কৰিবা।

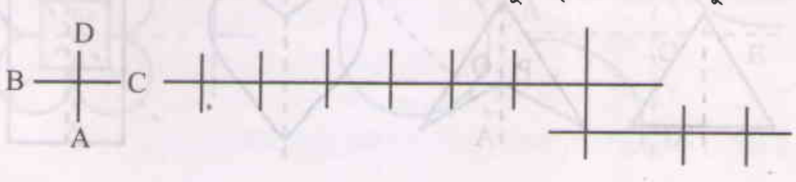
ৰঞ্জন ঃ কৰিম ছাৰ।

ছাৰ ঃ প্ৰথমে কিতাপখন $\overline{AB}$ ৰ দিশত 6″ ইঞ্চি নিয়া। (ৰঞ্জনে চিত্ৰত দিয়া ধৰণে ফুট লাইনেৰে নিয়ে) এতিয়া PQৰ দিশত 1 ফুট নিয়া। আকৌ $\overline{BA}$ ৰ দিশত 15″ নিয়া। (ৰঞ্জনে চিত্ৰত দেখুৱা ধৰণে অনা নিয়া কৰে।) কি দেখিলা?



ৰঞ্জন ঃ ছাৰ, কিতাপখন বহুদূৰ আঁতৰি আহিল, কিন্তু আগতে থকা ঠাইৰ নিচিনা বাহুবোৰ সমান্তৰাল হৈ থাকিল।

ছাৰ ঃ তোমালোকে বুজি পালা নিশ্চয়। ইয়াত আমাৰ তিনিটা প্ৰক্ৰিয়া সংযুক্ত হৈ আছে। এই গোটেই প্ৰক্ৰিয়াটোক আমি সংযুক্ত স্থানান্তৰণ প্ৰক্ৰিয়া বুলি কম।



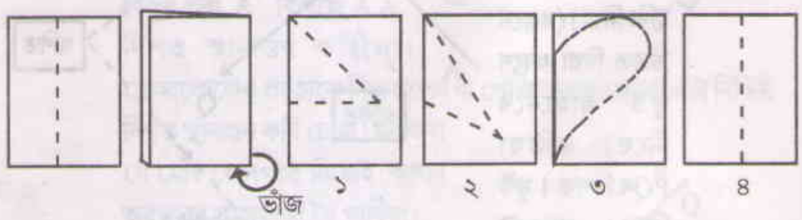
মই আঁকা চিত্ৰটো চাই লোৱা। ইয়াত মই যোগ চিনটোক কেবাবাৰো কৰা সংযুক্ত স্থানান্তৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰ ফলত চিত্ৰটো তৈয়াৰ হৈছে। নীলাক্ষি, কোৱাচোন কি কি সংযুক্ত প্ৰক্ৰিয়া কৰাৰ ফলত চিত্ৰটো পোৱা হৈছে?

নীলাক্ষি ঃ প্ৰথমে A স্থানৰ পৰা BCৰ দিশত দুটা ঘৰ বা দুগুণ দূৰত্ব গৈ পিছত যোগ চিনটো 6 বাৰ একে দিশত গৈছে। পিছত DA দিশত এটা দূৰত্ব আহি আকৌ BC দিশত তিনিবাৰ স্থানান্তাৰ হৈছে।

ছাৰ ঃ অতি সুন্দৰ। তোমালোকে নিজে এটা এনে ধৰণৰ যিকোনো বস্তু হতেৰে সাজি স্থানান্তৰ কৰি বিভিন্ন আৰ্হি গঠন কৰিবা। এইবাৰ আমি এবিধ বেলেগ প্ৰক্ৰিয়াৰ কথা কম। তোমালোকে মই কোৱাৰ দৰে কম্পাচ, কেচি, কাকত আদি আনিছা নহয়?

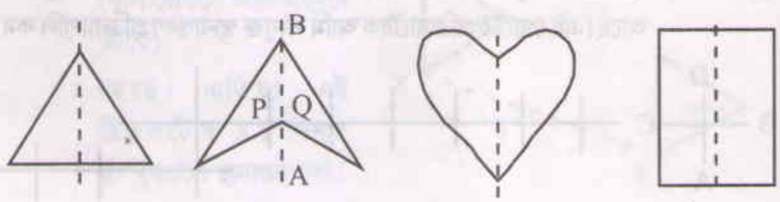
আটায়ে ঃ আনিছো ছাৰ।

ছাৰ ঃ তেন্তে কাকত এখন দীঘে দুভাগ কৰা। এভাগক সমানে চাৰিভাগ কৰা। প্ৰতিভাগকে সোমাজেৰে ভাঁজ দিয়া।



এতিয়া চাৰিওখনৰ ওপৰত মই দেখুৱা দৰে ফুট লাইন কেইটামান আঁকা। পিছত প্ৰতিখনৰে ফুট লাইনেৰে কেঁচিৰে কাটি উলিওৱা। জাপাবোৰ মেলা। কি দেখিলা?

নীলিমা ঃ ছাৰ, ১নং কাগজখনৰ পৰা এটা সমদ্বিবাহু ত্ৰিভূজ, ২নং কাগজখনৰ পৰা এটা তীৰৰ মূৰ, ৩নং কাগজখনৰ পৰা এটা আঁহতৰ পাত আৰু ৪নং কাগজখনৰ পৰা এটা আয়তক্ষেত্ৰ পাইছো।



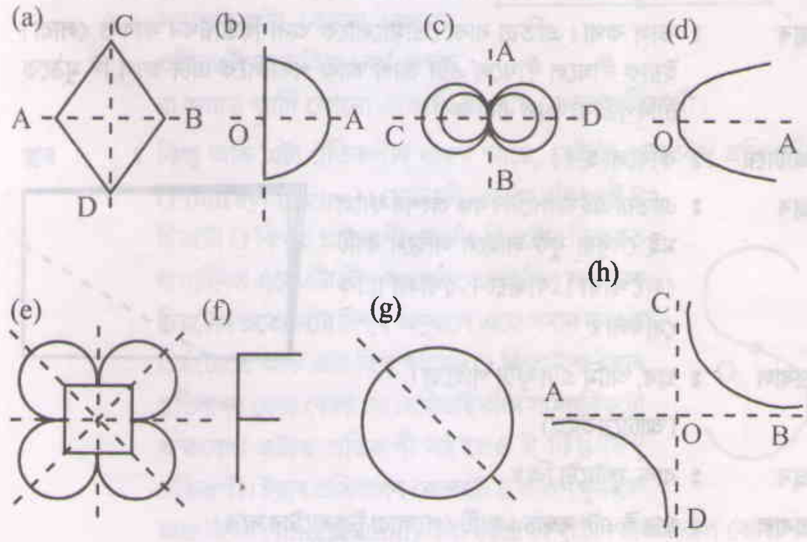
ছাৰ ঃ তোমালোকে বনোৱা এই চিত্ৰবোৰত বাৰু কি বিশেষ কথা মন কৰিছা? কোনে ক'বা?

নমিতা ঃ ছাৰ, প্ৰতিটো চিত্ৰই মাজৰ ভাজ ৰেখাটোৰ দুয়োপিনে একেদৰে আছে।

ছাৰ ঃ এৰা ঠিকেই। ভাঁজ ৰেখাটোৰ এপিনে থকা অংশটো বিপৰীতফালে থকা অংশটোৰ লগত হুবহু একে অৰ্থাৎ সদৃশ, যেনে এটা অংশ আনটোৰ এখন আয়নাৰ ওপৰত প্ৰতিফলনহে। ইয়াত ভাঁজৰেখাটোৱে এখন আয়নাৰ দৰে কাম কৰিছে। যেনে দ্বিতীয় চিত্ৰটোৰ P অংশটোৰ প্ৰতিফলন Q আৰু Qৰ প্ৰতিফলন P ; মাজৰ প্ৰতিফলনৰ AB ৰেখাটোক আমি এটা প্ৰতিৰূপী ৰেখা (line of symmetry) বুলি কম, আৰু চিত্ৰটো ABত প্ৰতিৰূপী (symmetrical about AB)।

তোমালোকে কাকতত এনে প্ৰতিৰূপী চিত্ৰ ধুনীয়া ধুনীয়া ডিজাইন কৰি বহুতো বনাব পাৰা। এইবোৰৰ প্ৰতিৰূপী ৰেখাবোৰো চিনাক্ত কৰি ল'বা।

মন কৰিবা যে এটা চিত্ৰ এটা বা তাতকৈ বেছি কেবাটাও ৰেখাত প্ৰতিৰূপী হ'ব পাৰে ; যেনে চোৱা মই আঁকা এই চিত্ৰকেইটা ডট্ ডট্ বিন্দুৰে দেখুওৱা ৰেখাবোৰত প্ৰতিৰূপী হয় নে নহয়।



নয়ন ঃ ছাৰ, মই কও। (a) চিত্ৰটো AB আৰু CD দুয়োটা ৰেখাতে প্ৰতিৰূপী। (b) চিত্ৰটো OAত প্ৰতিৰূপী, (c) চিত্ৰটো AB আৰু CD দুয়োটাতে প্ৰতিৰূপী, (d) চিত্ৰটো OAত প্ৰতিৰূপী, (e) চিত্ৰটো চাৰিওটা ডট্ ৰেখাতে প্ৰতিৰূপী আৰু ....

ছাৰ ঃ হ'ব হ'ব ; তুমি বহা। এইবাৰ মেঘালী কোৱা বাকী তিনিটাৰ কথা।

মেঘালী ঃ ছাৰ, F চিত্ৰটো কোনো ৰেখাতে প্ৰতিৰূপী নহয়।

ছাৰ ঃ ভেৰি গুড। অৰ্থাৎ কিছুমান চিত্ৰ কোনো ৰেখাতে প্ৰতিৰূপী নহ'বও পাৰে। ভাল কথা। কৈ যোৱা।

মেঘালী ঃ (g) বৃত্তটো কেন্দ্ৰৰ মাজেৰে যোৱা যি কোনো সৰলৰেখাতে প্ৰতিৰূপী।

ছাৰ ঃ অৰ্থাৎ বৃত্তটোৰ যিকোনো ব্যাসতে প্ৰতিৰূপী। তাৰ মানে এটা বৃত্তৰ অসীম সংখ্যক প্ৰতিৰূপী ৰেখা আছে। (h) চিত্ৰটোৰ কি?

মেঘালী ঃ ছাৰ (h) চিত্ৰটোৰ প্ৰতিৰূপী ৰেখা আপুনি আঁকা নাই। ইয়াত প্ৰতিৰূপী ৰেখা হ'ব BOC বা AOD কোণৰ সমদ্বিখণ্ডক।

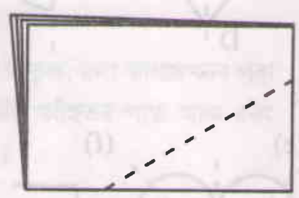
ছাৰ ঃ ময়ূৰ, মেঘালীয়ে কোৱাটো শুদ্ধ হৈছেনে?

ময়ূৰ ঃ কোৱাটো শুদ্ধ হৈছে। কিন্তু আৰু এটা প্ৰতিৰূপী ৰেখা আছে ; যেনে AOC বা BOD কোণৰ সমদ্বিখণ্ডক ডালো এডাল প্ৰতিৰূপী ৰেখা।

ছাৰ ঃ ভাল কথা। এতিয়া বাৰু তোমালোকে অনা দ্বিতীয়খন কাকত লোৱা। ইয়াক দীঘলে দীঘলে এটা জাপ আৰু পথালিকৈ এটা জাপ দি মুঠতে চাৰিপতীয়া জাপ এটা কৰা।

আটায়ে ঃ কৰিলো ছাৰ।

ছাৰ ঃ এতিয়া এই জাপটোৰ বন্ধ অংশৰ ফালে মই দেখুৱা ফুট লাইনে লাইনে কাটি লেপোৱা। বান্ধটো খোলা। কি দেখিলা?

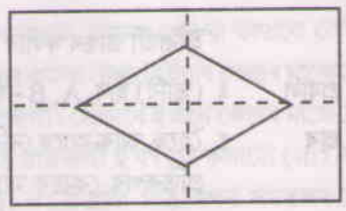


প্ৰবাল ঃ ছাৰ, আমি এটা ফুটা পাইছো।

(আটায়ে হয়ঁহে)

ছাৰ ঃ বাৰু, ফুটাটো কি?

প্ৰবাল ঃ ছাৰ ই এটা ৰম্বাচ। কাটি পেলোৱা টুকুৰাটোৰ দৰে।



ছাৰ ঃ এতিয়া মোক কোৱাচোন এই ফুটা ৰম্বাচ টোৰ প্ৰতিৰূপী অক্ষ কেইডাল আছে?

প্ৰবাল ঃ দুডাল ছাৰ। কৰ্ণ দুডাল।

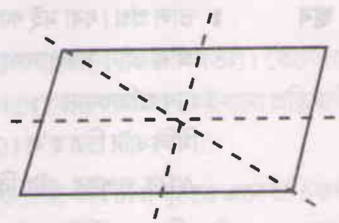
নীলিমা ঃ নহয় ছাৰ। চাৰিডাল।

ছাৰ ঃ নহয় দুডালহে, কিয় হ'ল ভাবি চোৱা।

নীলিমা ঃ ও হয় ছাৰ। বিপৰীত বাহুদুটাৰ মধ্যবিন্দুৰে যোৱা ৰেখা দুডালকো মই প্ৰতিৰূপী অক্ষ বুলি ভুল কৰিছিলো। এনে এডাল ৰেখাত এটা অংশ বাকীটোৰ প্ৰতিফলন নহয়।

ছাৰ ঃ গতিকে কোৱা, যি কোনো সামন্তৰিক চিত্ৰ এটা প্ৰতিৰূপীনে, অৰ্থাৎ ইয়াৰ এনে এটা অক্ষ আছে নেকি যে ই সেই অক্ষৰেখা সাপেক্ষে প্ৰতিৰূপী?

নীলিমা ঃ যি কোনো সামন্তৰিক কোনো ৰেখাতে প্ৰতিৰূপী নহ'বও পাৰে; যেনে, এইটো ছাৰ (বুলি তেওঁ বহীত অঁকা কাষৰ চিত্ৰটো সকলোকে দেখুৱায়) এই সামন্তৰিকটো কোনো ৰেখাতে প্ৰতিৰূপী নহয় কিন্তু। বৰ্গ, ৰম্বাচ বা আয়ত আদি কোনো একোটা বা বেছি ৰেখাত প্ৰতিৰূপী।



ছাৰ ঃ কিন্তু আৰু এটা প্ৰতিৰূপীৰ ধাৰণা আছে, সেইটো হ'ল বিন্দু প্ৰতিৰূপী (Point symmetry)। যেনে মই বোৰ্ডত অঁকা এই S চিত্ৰটো O বিন্দুত প্ৰতিৰূপী। অৰ্থাৎ চিত্ৰটোৰ ভিতৰত বা বাহিৰত এনে এটা বিন্দু আছে যাতে এই বিন্দু সাপেক্ষে চিত্ৰটোৰ প্ৰত্যেকটো বিন্দুৰ অনুৰূপে একে সমান দূৰত্বত চিত্ৰটোতে আৰু এটা বিন্দু আছে। O বিন্দুটোক ইয়াৰ প্ৰতিৰূপৰ কেন্দ্ৰ বোলা হয়। নমিতাই অঁকা সামন্তৰিকটো অক্ষৰেখা এটাত প্ৰতিৰূপী নহ'লেও ই কিন্তু বিন্দু প্ৰতিৰূপী। ইয়াৰ প্ৰতিৰূপৰ কেন্দ্ৰটো হ'ল কৰ্ণ দুডালে অন্তৰ্চ্ছেদন (intersection) কৰা কেন্দ্ৰ বিন্দুটো। বাৰু প্ৰবাল কোৱা—

ইংৰাজী ডাঙৰ ফলাৰ কোনকেইটা অক্ষৰ বিন্দু প্ৰতিৰূপী?

প্ৰবাল : (ভাবি) ছাৰ, A, B নহয়, H, I, O, U, X আৰু Z হে ছাৰ।

ছাৰ : হৈছে, আৰু আছে নেকি ভাবি চাবা। প্ৰকৃততে বিন্দু প্ৰতিৰূপী চিত্ৰবোৰক প্ৰতিৰূপৰ কেন্দ্ৰৰ মাজেৰে 180^0 ঘূৰালে চিত্ৰটো একেই দেখা যাব। তোমালোকে ঘৰত কৰি চাবা তলৰ কোনবোৰ চিত্ৰ বিন্দু প্ৰতিৰূপী; আৰু যদি হয় তেন্তে প্ৰতিৰূপৰ কেন্দ্ৰ বিন্দু কোনটো।

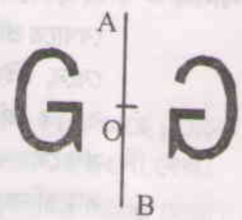
(i) বৰ্গ (ii) আয়ত (iii) সুষম পঞ্চভুজ

(iv) সুষম ষড়ভুজ (v) সুষম অষ্টভুজ।

(ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলে লিখি লয়)

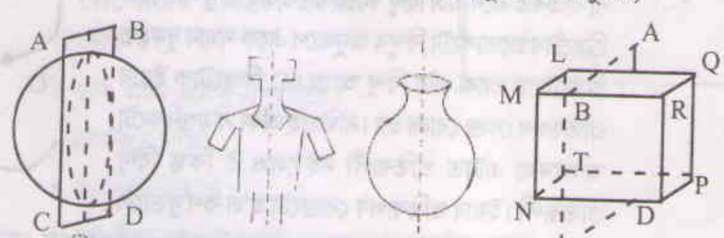
নীলাক্ষি : ছাৰ, চিত্ৰ এটাৰ প্ৰতিৰূপী কেন্দ্ৰটো কেতিয়াবা চিত্ৰটোৰ বাহিৰতো থাকিব পাৰে নেকি?

ছাৰ : ভাল প্ৰশ্ন। ধৰা মই কাগজ এখনত আখৰ G আৰু এটা সৰলৰেখা AB আঁকিলো। ধৰা Gৰ প্ৰতিফলন G′। এতিয়া G আৰু G′ মিলি এটা চিত্ৰ হ'ল। দেখিবা যে এই চিত্ৰটো ABৰ ওপৰৰ এটা বিন্দু Oত প্ৰতিৰূপী।



ছাৰ : বঢ়িয়া। এতিয়া বহা। আমি বুজিলো যে প্ৰতিৰূপী ৰেখাবোৰে এখন আৰ্চিৰ দৰে কাম কৰে। এই আৰ্চিখনে এটা অংশক কৰা প্ৰতিফলনটোতহে যেন আইনাটো অংশ পোৱা গৈছে। একেদৰে আমি প্ৰতিৰূপী ঘনবস্তু কিছুমান পাব পাৰো; যেনে ধৰা এইখন চিত্ৰ মই আঁকি আনিছো।

(ছাৰে চাৰ্ট পেপাৰ এখনত আঁকি অনা চিত্ৰ দুটামান দেখুৱায়)



(i) (ii) (iii) (iv)

ইয়াত লক্ষ্য কৰিবা যে প্ৰতিটো ঘনবস্তুই কোনো এখন বা তাতকৈ বেছি সমতলত প্ৰতিৰূপী; যেনে (i) চিত্ৰৰ কমলা টেঙাটো ইয়াৰ কেন্দ্ৰৰ মাজেৰে যোৱা ABCD সমতলখনত প্ৰতিৰূপী। সেইদৰে ই এনে কেন্দ্ৰৰ মাজেৰে যোৱা যি কোনো এখন সমতলত প্ৰতিৰূপী হ'ব। এই কথাটো (iii) নং চিত্ৰটিৰ বাবেও সত্য। কিন্তু (ii) নং চিত্ৰটো মাত্ৰ এখন সমতলতহে প্ৰতিৰূপী। বাৰু এতিয়া তোমালোকে কোৱা (iv) নং ঘনকটো কোন কেইখন সমতলত প্ৰতিৰূপী?

নীলাক্ষি : ছাৰ, ঘনকটো আপুনি আঁকি থোৱা ABCD সমতলত প্ৰতিৰূপী হ'ব। তাৰোপৰি দাঁতিৰ বাহুবোৰৰ মধ্যবিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা আৰু ABCDৰ লম্ব হোৱা প্ৰতিখন সমতলত ই প্ৰতিৰূপী হ'ব। এনে সমতল তিনিখন আছে।

ছাৰ : বঢ়িয়া, কিন্তু তুমি আৰু প্ৰতিৰূপী সমতল কিবা আছে বুলি ভাবানে? বাৰু, নিপু, কোৱা।

নিপুকণ : ছাৰ, আৰু আছে। LM আৰু OPৰ মাজেৰে যোৱা সমতল। তেনেদৰে প্ৰত্যেক দুটা বিপৰীত দাঁতিৰ মাজেৰে যোৱা সমতল কেইখনো প্ৰতিৰূপী তল হ'ব।

ছাৰ : এৰা ঠিকেই; এতিয়া তোমালোকে চিন্তা কৰি চাবা মুঠতে এনে প্ৰতিৰূপী তল কেইখন আছে। তাৰোপৰি প্ৰতিৰূপী চিত্ৰবোৰৰ প্ৰতিৰূপ ৰেখা বা তল এখনৰ ক্ষেত্ৰত কেইটামান মূল ধৰ্ম লক্ষ্য কৰি চাবা; যেনে প্ৰতিৰূপী চিত্ৰৰ প্ৰতিটো বিন্দুৰে প্ৰতিৰূপী ৰেখা বা তলখনৰ বিপৰীতে আৰু একে সমান আঁতৰত চিত্ৰটোৰ ওপৰতে অইন এটা বিন্দু থাকে।

নিপুকণ : ছাৰ, ঘনবস্তু এটা মাত্ৰ এটা সৰলৰেখা নাইবা মাত্ৰ এটা বিন্দুত প্ৰতিৰূপী হ'ব পাৰেনে?

ছাৰ : ভাল প্ৰশ্নই সুধিছা। এই গোটেইবোৰ প্ৰশ্নৰ উত্তৰ তোমালোকে মই কোৱা প্ৰতিৰূপৰ সংজ্ঞা আৰু ধৰ্মৰ কথা লক্ষ্য কৰিলেই পাবা। তোমাৰ প্ৰশ্নৰ উত্তৰ মেঘালীয়ে দিব।

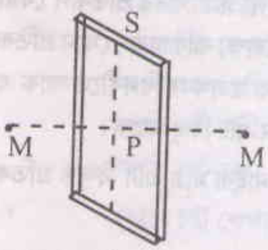
মেঘালী : পাৰে ছাৰ। যেনে চিত্ৰ (iv)ৰ ঘনকটো তাৰ কেন্দ্ৰ বিন্দুটোত আৰু ওপৰৰ (iii) নং চিত্ৰৰ কলহটো তাৰ সোমাজেৰে যোৱা ফুট লাইনটোত প্ৰতিৰূপী।

ছাৰ ঃ হয়। মেঘালীয়ে ইমান সুন্দৰ উত্তৰ দিব বুলি ভবাই নাছিলো। গতিকে তোমালোকে আটায়ে আমি এতিয়ালৈ কোৱা কথবোৰ বুজিছা। আজি আমি এটা আৰু এটা জ্যামিতিক প্ৰক্ৰিয়াৰ কথা আলোচনা কৰিম। তাৰ নাম প্ৰতিফলন, ইংৰাজীত reflection। প্ৰতিফলনৰ কথা তোমালোক এতিয়ালৈ বহুতেই পাই আহিছা— বিশেষকৈ পদাৰ্থ বিজ্ঞানত। তোমালোকে নিজেও প্ৰতিদিনে আয়নাত নিজৰ মুখখনৰ প্ৰতিচ্ছবি চোৱাই— ইও এক প্ৰতিফলনৰ ফলহে।

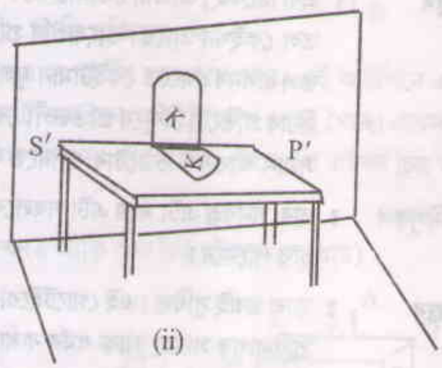
কিশোৰ ঃ ছাৰ, প্ৰতিৰূপ বা প্ৰতিফলন— এইবোৰকো জানো আমি প্ৰক্ৰিয়া বুলি ক'ব পাৰো?

ছাৰ ঃ এই কৰা কাৰ্যটোহে প্ৰক্ৰিয়া। প্ৰকৃততে আমি কাৰ্য আৰু ধাৰণা গণিতৰ বহু ক্ষেত্ৰতে প্ৰয়োগ কৰিবলগীয়া হয়। আমি ইয়াত মাথো সাধাৰণ সংজ্ঞাভিত্তিক ধাৰণাহে লৈছো। কিন্তু হ'লেও বহল অৰ্থত প্ৰয়োগৰ বেলিকাও এই ধাৰণাৰ ভিত্তিতেই আগবাঢ়িম।

এখন আয়নাৰ সন্মুখত এটা ৰঙা মাৰ্বল (M) বা যি কোনো এটা সৰু বস্তু ৰাখা। তোমালোকে জানা যে যদি M′ ইয়াৰ প্ৰতিবিম্ব (image) তেন্তে MP=P M′ আৰু MP, PS আয়নাৰ সমতলখনত লম্ব।



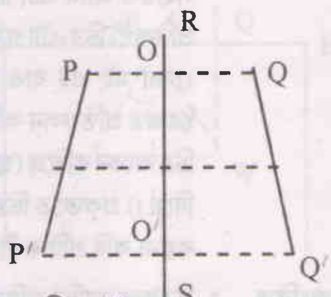
(i)



(ii)

এতিয়া ধৰা এটা খোটালীৰ বেৰত এখন টেবুল লগাই থৈ তাৰ ওপৰত দাঁতিত লগাই এখন আয়না ঠিয়কৈ থোৱা হ'ল। টেবুলৰ ওপৰৰ এখন কাকতত K অক্ষৰটো ডাঙৰকৈ লিখি আয়নাৰ সমুখত ৰাখি থোৱা হ'ল।

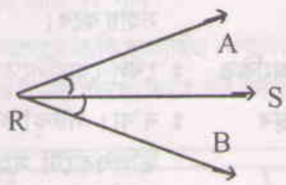
এতিয়া Kৰ প্ৰতিবিম্বটো আয়নাখনত কেনে দেখা যাব? Kৰ প্ৰতিটো বিন্দু আয়নাৰ ওপৰত আৰু S′P′ ৰেখাৰ পৰা একে সমান দূৰত্বত থাকিব। ওপৰৰ চিত্ৰ দুয়োটাতে আয়নাৰ কথা পাহৰি বস্তু আৰু প্ৰতিবিম্বৰ মাজত থকা SP বা S′P′ ৰেখাটোক লোৱা। গণিতত আমি কম যে M′ বিন্দুটো M বিন্দুটোৰ SP ৰেখাত প্ৰতিফলন আৰু K চিত্ৰটোৰ S′P′ ৰেখাত প্ৰতিফলন ꓘ।



চিত্ৰ- (iii)

সোঁকাষৰ চিত্ৰত PP′ ৰেখাখণ্ডটোৰ RS ৰেখাত প্ৰতিফলন হ'ব QQ′, কাৰণ P বিন্দুৰ প্ৰতিফলন Q অৰ্থাৎ PO= OQ আৰু PQ, RSৰ লম্ব। সেইদৰে PP′ৰ ওপৰত থকা প্ৰতিটো বিন্দুৰে প্ৰতিফলিত বিন্দুবোৰে QQ′ ৰেখাখণ্ডটো উৎপন্ন কৰিছে। হয়নে নহয় চোৱা। গতিকে PP′ৰ প্ৰতিফলন QQ′ নাইবা একেদৰে QQ′ৰ প্ৰতিফলন PP′।

চিত্ৰ (i)তআমি কম যে SP প্ৰতিফলনৰ অক্ষ (axis of reflection)। সেইদৰে—



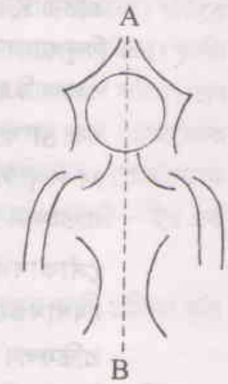
চিত্ৰ- (iv)

চিত্ৰ (ii)ত S′P′ ৰেখাটো আৰু চিত্ৰ (iii)ত RS ৰেখাটো প্ৰতিফলনৰ অক্ষ। চিত্ৰ (iv)ত $\overrightarrow{RA}$ ৰশ্মিৰ RS ৰেখাত প্ৰতিফলন $\overrightarrow{RB}$ ৰশ্মি। মন কৰা যে RS ৰেখা <ARBৰ কোণ সমদ্বিখণ্ডক।

তৰালি ঃ ছাৰ, আমি আগতে পাই অহা প্ৰতিৰূপী চিত্ৰবোৰতো তেনেহ'লে প্ৰতিফলনৰ অক্ষ আছে।

ছাৰ ঃ তুমি খুব সুন্দৰ চিন্তাকে কৰিছা। অৱশ্যে দুয়োটা কথাৰে সাদৃশ্য আছে যদিও ধাৰণা দুটা বেলেগ। প্ৰত্যেক প্ৰতিৰূপী চিত্ৰৰে অতি কমেও এডাল

প্ৰতিফলনৰ অক্ষ আছে; কিন্তু মন কৰা যে এই প্ৰতিফলনৰ অক্ষটোৱে চিত্ৰটোৰ এটা অংশকহে অইনটোৰ ওপৰত প্ৰতিফলন কৰে। গোটেই চিত্ৰটোক নহয়। হ'লেও ইও এটা প্ৰতিফলনৰে উদাহৰণ। প্ৰতিফলনৰ সহায়ত আমি এটা চিত্ৰৰ এটা অংশৰ পৰা প্ৰতিৰূপী চিত্ৰ এটা গঠন কৰিব পাৰো। যেনে চোৱা মই এই বাও অংশটোৰ পৰা AB ৰেখাত প্ৰতিফলন কৰি এটা পূৰা প্ৰতিৰূপী চিত্ৰ অংকন কৰিছো (ছাৰে কাষৰ ছবিটো আঁকি দিয়ে।) প্ৰকৃততে চিত্ৰ শিল্পীবোৰে এনেদৰে এটা প্ৰতিৰূপী ৰেখা মনতে কল্পনা কৰি প্ৰতিৰূপী চিত্ৰবোৰ অংকন কৰে।



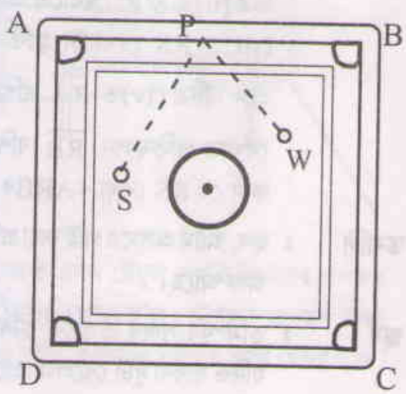
অংকিত ঃ চিত্ৰকলা আদিৰ বাহিৰেও জানো এনে প্ৰতিফলনৰ ধাৰণা আমাক গণিতত লাগে?

ছাৰ ঃ গণিতৰ বহুতো সমস্যা সমাধানত এনে প্ৰতিৰূপ, প্ৰতিফলন আদিৰ ধাৰণা অতি প্ৰয়োজন। প্ৰয়োগিক গণিত, কাৰিকৰী, প্ৰযুক্তি বিদ্যাৰ কথা বাদেই সাধাৰণ খেল-ধেমালিৰ কৌশলবোৰতো এনে ধাৰণাই আমাক বহুতো সহায় কৰে।

অংকিত ঃ খেল-ধেমালিতো! আমাক এটি উদাহৰণ দিব নেকি ছাৰ?

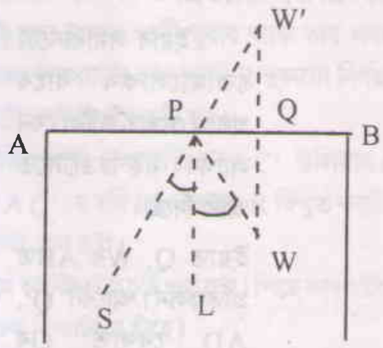
ছাৰ ঃ ৰ'বা। পটক্‌কৈ বিচাৰি উলিওৱাটো সহজ নহয় যদিও অলেখ উদাহৰণ আছে। মই বাৰু এটা সৰল উদাহৰণ দিছো।

ধৰা তুমি আৰু মই কেৰম খেলিছো। মোৰ বগা গুটি Wটোক মই S ষ্ট্ৰাইকাৰটোৰে খুন্দিয়াব লাগে। মই AB



বাউণ্ডেৰীৰ এনে এটা ঠাই Pলৈ Sঅক জোৰেৰে মাৰি পঠিয়াব লাগে যাতে ই Pত প্ৰতিফলিত হৈ আহি Wক খুন্দা মাৰে। এতিয়া মই এজন খেলুৱৈ হৈ এই P স্থানটো কেনেদৰে বিচাৰি উলিয়াম। তোমালোকৰ কোনে ক'ব পাৰা?

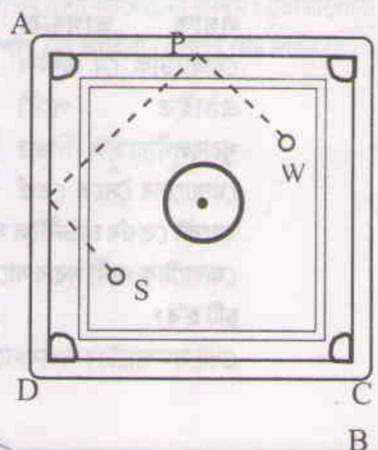
(আটায়ে চিন্তা কৰে যদিও কোনেও ভাবি উলিয়াব নোৱাৰিলে।)



ধ্রুৱ ঃ বাৰু চোৱা (চিত্ৰটো আঁকি); মই প্ৰথমে Wৰ পৰা ABৰ ওপৰত WQ লম্ব এটা কৰিম আৰু WQ = Q W' ধৰিম। এতিয়া S W' সংযোগ কৰা ৰেখাই যদি P বিন্দুত কাটে তেন্তে P বিন্দুটোৱে আমি উলিয়াব লগা স্থানটো হ'ব। কাৰণ কি কোৱা?

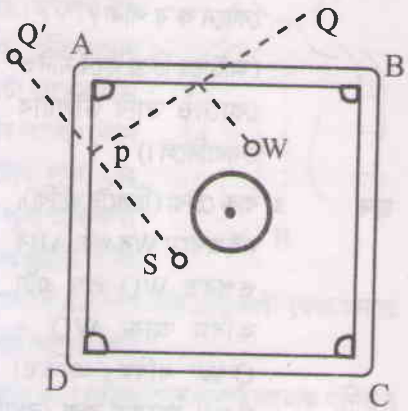
নীলিমা ঃ কাৰণ W, W'ৰ প্ৰতিবিম্ব হ'ব আৰু SPW কোণৰ সমদ্বিখণ্ডক PL, W W'ৰ সমান্তৰাল। গতিকে <SPL = <WPL। গতিকে $\overrightarrow{SP}$ ৰে যোৱা ষ্ট্ৰাইকাৰটোৱে P বিন্দুত প্ৰতিফলিত হৈ আহি W পাব।

ধ্রুৱ ঃ তুমি এনে সুন্দৰকৈ ব্যাখ্যা কৰিলা যেন আগতে ভাবিহে আহিছা। দৰাচলতে এনে ধৰণৰ কিছুমান অইন জগত বিখ্যাত সমস্যা আছে। তাৰে এটা উদাহৰণ উল্লেখ কৰিম। এনে কিছুমান উদাহৰণৰ লগত চিনাকী থাকিলে তোমালোকে প্ৰতিযোগিতামূলক পৰীক্ষাৰ প্ৰশ্ন কিছুমানত সহায় পাবা।



ধৰা মই আকৌ কেৰম-বোৰ্ডৰ সমস্যাটোকে ল'লো। ধৰা, S আৰু Wৰ মাজত অইন গুটি আছে অৰ্থাৎ Sৰ পৰা W লৈ পোনেই যাব নোৱাৰি। যদি

খেলুৱৈজনে প্ৰথমে DA বাউণ্ডেৰীত কোবাই তাৰ পিছত AB বাউণ্ডেৰীত কোবাইহে W গুটিটোক খুন্দা মাৰিবলগীয়া হয়, তেন্তে খেলুৱৈজনে কোন দিশত প্ৰথমে ষ্ট্ৰাইক কৰিব?

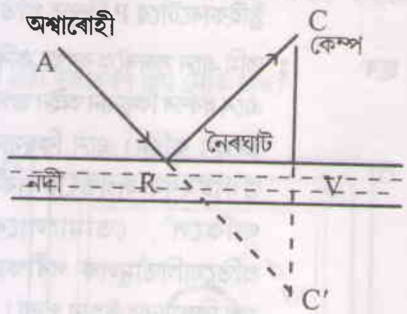


ইয়াৰ সমাধানটো তোমালোকৰ বাবে প্ৰথমে দেখাত জটিল যেন লাগিব। মই চিত্ৰটোতে আঁকি দিছো।

ইয়াত Q, Wৰ ABত প্ৰতিফলন। আকৌ Q', AD ৰেখাত Qৰ প্ৰতিফলন। গতিকে খেলুৱৈজনে Q' বিন্দুটোলৈ দিশ স্থিৰ কৰিব লাগিব।

নিপুকণ ঃ ছাৰ, এনে ধৰণৰ সমস্যা এটা আমাৰ অলিম্পিয়াদ পৰীক্ষাত আহিছিল। সমস্যাটো এনে—

এজন অশ্বাৰোহী সৈন্যই এঠাইৰ পৰা ঘোৰাটোৰ সৈতে দৌৰি আহি ভাগৰ লগাত ভাগৰুৱা ঘোৰাটোক নৈ এখনৰ এঠাইত পানী খুৱাবলগীয়া হ'ল। পিছত ঘোৰাটোৰ সৈতে তেওঁ আকৌ তেওঁৰ চাউনীলৈ যাবগৈ। সমস্যাটো হ'ল তেওঁ কোনখিনি ঠাইত ঘোৰাটোক পানী খুৱাব যাতে চিধা ৰাস্তাৰে অহা-যোৱা পথটো আটাইতকৈ চুটি হ'ব?



সেই সমস্যাটোৰ সমাধানটো বোধহয় আমি ওপৰৰ দৰেই পাম।

ছাৰ ঃ তুমি ঠিক মনত পেলাইছা। মই এনে এটা সমস্যাকে কম বুলি ভাবি আছিলো যাক প্ৰতিফলনৰ সূত্ৰেৰে সমাধান কৰিব পাৰি।
এয়া চোৱা মই ছবি আঁকি বুজাই আছো কথাবোৰ আমি ওপৰত কৰি অহা সমস্যা দুটাৰ দৰে একে। ধৰা RV নৈখন। অশ্বাৰোহীয়ে ঘোঁৰাৰে A স্থানৰ পৰা আহি নৈখনৰ এটা স্থান Rঅত পানী খুৱাব আৰু তাৰ পৰা RC পথেৰে গৈ C কেম্প পাব। সমস্যাটো হ'ল আমি R স্থানটো নিৰ্ণয় কৰিব লাগে যাতে ARC পথটো আটাইতকৈ চুটি হয়।

নীলাক্ষি ঃ ছাৰ, এতিয়া মই পাৰিম। আমি প্ৰথমে Cৰ প্ৰতিফলন C′ উলিয়াম। পিছত A C′ সংযোগ কৰিম। A C′ য়ে যদি RV ৰেখাক R বিন্দুত কাটে তেন্তে R বিন্দুটোৱে আমি বিচৰা স্থান হ'ব।

ছাৰ ঃ বঢ়িয়া। এতিয়া ARC পথটোৱে আটাইতকৈ চুটি পথ হ'ব। পিছে কাৰণটো কৈ দিয়া, আৰু বেছি বঢ়িয়া হওক। (আটায়ে হাঁহে)

নীলাক্ষি ঃ ছাৰ, দুটা বিন্দুৰ মাজত আটাইতকৈ চুটি পথটো হ'ল সৰলৰেখা। গতিকে A আৰু C′ৰ মাজৰ চুটি পথটো AR C′। এতিয়া RC আৰু R C′ সমান, কাৰণ CRV আৰু VRC কোণ দুটা সমান, যিহেতু CV = V C′। গতিকে AR + RC = ARC গতিকে চুটি পথটো ARC।

ছাৰ ঃ সম্পূৰ্ণ শুদ্ধ। ইয়াত আমি গাণিতিক পদ্ধতিত নৈখনক মাত্ৰ এডাল সৰলৰেখা RV বুলি ধৰি লৈছো। নৈৰ প্ৰস্থৰ লগত সমস্যাটোৰ কোনো সম্বন্ধ নাই। যিয়েই নহওক, তোমালোকৰ ব্যুৎপত্তি দেখি মই ৰং পাইছো। আজি পিছে সময় বহুত হ'ল। কাইলৈ আমি এই প্ৰক্ৰিয়াবোৰৰ অইন কিছুমান বেলেগ গাণিতিক পদ্ধতিৰ কথা আলোচনা কৰিম। তোমালোক প্ৰত্যেকে দুখনমানকৈ গ্ৰাফ পেপাৰ লৈ আহিবা। তেন্তে গুড নাইট।

আটায়ে ঃ নমস্কাৰ ছাৰ, ধন্যবাদ ছাৰ!!

* * * * * * *

সপ্তম দিন

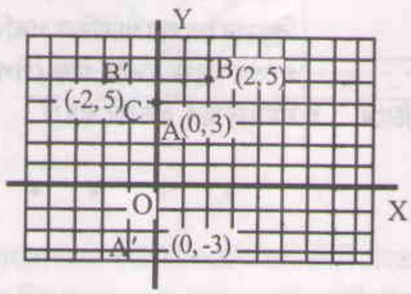
স্থানান্তৰ আহিঁ আৰু সৌন্দৰ্য্য

।। পিছদিনা সুমন্ত নামৰ নতুন ছাৰ এজন স্কুললৈ আহি অফিচৰূপত সোমাল। অলপ পিছতে দহবজাৰ লগে লগে তেওঁ হাতত জ্যামিতিক সৰঞ্জাম কেইটামান লৈ শ্ৰেণীত সোমাল। পিছে পিছে দেখোন অৰ্জুন বাহাদুৰ ; হাতত এখন ডাঙৰ বোৰ্ড। বৰ্গ বোৰ্ডখন ষ্টেণ্ডত ওলোমাই ঠিকঠাক কৰি অৰ্জুন ঘূৰি গ'ল।।

সুমন্ত ছাৰ : ছাত্ৰ-ছাত্ৰীহঁত! বৰ্গ বোৰ্ডৰ ব্যৱহাৰ তোমালোকে জানা, কিয়নো তোমালোকে ইতিমধ্যে গ্ৰাফ পেপাৰ বা লেখ কাকতৰ ব্যৱহাৰ বহুত কৰিছা। গ্ৰাফ পেপাৰ, জিওবোৰ্ড, ডট্‌বোৰ্ড এই আটাইবোৰেই বৰ্গবোৰ্ডৰ ভিতৰতে পৰে, আমি মাথোন বৰ্গ হিচাপে ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰিলেই হ'ল। তোমালোকে গ্ৰাফ পেপাৰ আনিছা নহয়?

আটায়ে : আনিছো ছাৰ।

ছাৰ : তেন্তে গ্ৰাফ পেপাৰত স্থানাংক অক্ষ দুটা আঁকি লোৱা।



প্ৰবাল : ছাৰ মাজতে আঁকিমনে?

ছাৰ : পেপাৰখনৰ আধামানত আঁকিবা। বাকী আধা পিছত। এতিয়া মই তলত লিখা বিন্দুবোৰ বহুৱা।

A (0, 3), B (2, 5), C (-2, 5), D (-3, 4), E (0, 6), F (-1, -5)

নীলিমা : ছাৰ কি স্কেলত আঁকিম?

ছাৰ : যিকোনো স্কেলেই ল'ব পাৰিবা। যেনে, দহটা বৰ্গবাহুৰ দীঘ এক একক। মাত্ৰ দেখাত ভাল হ'ব লাগে আৰু যাতে বিন্দুবোৰ কাকতৰ ওপৰতে থাকে।

ময়ূৰী : ছাৰ, আমি বিন্দুবোৰ বহালো।

ছাৰ : আটায়ে বহালানে?

আটায়ে : হয় ছাৰ।

ছাৰ : এতিয়া তোমালোকে কোৱা A বিন্দুটোৰ X-অক্ষত প্ৰতিফলন কি?

নমিতা : ছাৰ A' (0, -3), কাৰণ এই বিন্দুটো X-অক্ষৰ পৰা লম্বভাৱে আৰু বিপৰীত দিশত একে সমান দূৰত্ব আছে।

ছাৰ : শুদ্ধ উত্তৰ। এইবাৰ আটায়ে উলিওৱা—

B বিন্দুটোৰ Y-অক্ষত প্ৰতিফলন কি?

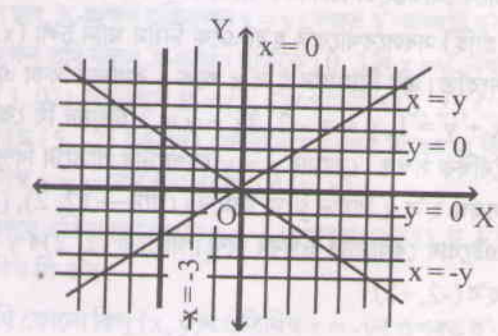
কিশোৰ : ছাৰ B' (-2, 5) অৰ্থাৎ Bৰ প্ৰতিফলন C।

ছাৰ : বঢ়িয়া। এতিয়া তোমালোকে চাৰিটা সৰলৰেখা গ্ৰাফ পেপাৰত আঁকা—

(i) $x = y$ (ii) $x = -y$ (iii) $y = 2$ (iv) $x = -3$

পাৰিবানে? সৰলৰেখা অঁকাটো সহজ। ৰেখাটোত থকা দুটা বা তিনিটা বিন্দু বিচাৰি উলিয়াই বহালেই হ'ল।

(i) নং ৰেখাটোত x, yৰ মানবোৰ সমান। গতিকে ই x, y ৰেখাত সমানে হালি থকা এটা ৰেখা; অৰ্থাৎ <XOYৰ সমদ্বিখণ্ডক।



(ii) নং $x = -y$ ৰেখাটো ইয়াৰ বিপৰীত, অৰ্থাৎ $<YOX'$ ৰ সমদ্বিখণ্ডক। বাকী দুটা কি হ'ব কোৱা?

ৰঞ্জন ঃ ছাৰ $y = 2$ সৰলৰেখাটো X-অক্ষৰ পৰা দুঘৰ ওপৰত আৰু X-অক্ষৰ সমান্তৰাল। ইয়াৰ ওপৰৰ প্ৰতিটো বিন্দুৰ x-স্থানাংক যিয়েই নহওক কিয়, y-স্থানাংকটো সদায় 2।

তেনেদৰে $x = -3$ ৰেখাটোও Y-অক্ষৰ পৰা 3 ঘৰ বাওহাতে আৰু Y-অক্ষৰ সমান্তৰাল। ইয়াৰ ওপৰৰ প্ৰতিটো বিন্দুৰ y-স্থানাংক যিয়েই নহওক কিয় x-স্থানাংকটো -3।

ছাৰ ঃ অৰ্থাৎ ইয়াৰ ওপৰৰ বিন্দুবোৰ $(-3, y)$ আৰ্হিৰ। তেনেদৰে $y = +2$ৰ ওপৰৰ বিন্দুবোৰ $(x, +2)$ আৰ্হিৰ।

এতিয়া নীলিমা কোৱা, $y = +2$ ৰেখাটোৰ X-অক্ষত প্ৰতিফলন কি হ'ব?

নীলিমা ঃ ছাৰ, ইয়াৰ ওপৰত থকা প্ৰতিটো বিন্দুৰ প্ৰতিফলন হয় $(x, -2)$, অৰ্থাৎ প্ৰত্যেক xৰ বাবেই $y = -2$, গতিকে $y = 2$ৰ প্ৰতিফলন হ'ব $y = -2$।

ছাৰ ঃ ভাল কথা। নিপুকণ, $x = -3$ৰ Y-অক্ষত প্ৰতিফলন কি হ'ব?

নিপুকণ ঃ ছাৰ, ইয়াৰ ওপৰৰ প্ৰতিটো বিন্দুৰে প্ৰতিফলন $(3, y)$; অৰ্থাৎ প্ৰত্যেক yৰ বাবেই $x = 3$। গতিকে ই এটা সৰলৰেখা $x = 3$।

ছাৰ ঃ হয়। প্ৰবাল কোৱা,

$x = y$ ৰেখাটোৰ Y-অক্ষত প্ৰতিফলনটো কি? ই X-অক্ষত কৰা প্ৰতিফলনটোৰ সৈতে একে নে বেলেগ?

প্ৰবাল ঃ ছাৰে মোকহে টানটো দিব পাৰিলে! অকণমান ইংগিত দিব নেকি ছাৰ?

ছাৰ ঃ (হাঁহি) সৰলৰেখাবোৰ হ'ল একে নিয়ম মানি চলা (x, y) বিন্দুবোৰৰ সংহতি। এই নিয়মটো হ'ল x আৰু yৰমাজত থকা এটা সম্বন্ধ, যেনে $x + y = 1$, $y = x - 2$, $2x + y = 3$ ইত্যাদি যি কোনো এক ধৰণৰ ৰৈখিক সম্বন্ধ। তোমাৰ $x = y$ ৰেখাটোৰ প্ৰতিটো বিন্দুৰ xৰ লগত yৰ সম্বন্ধ হ'ল x যিমান yয়ো সিমান। যেনে— $(2, 2)$, $(4, 4)$, $(-7, -7)$ এইবোৰ ৰেখাটোৰ ওপৰৰ বিন্দু। গতিকে $(2, 2)$ৰ y-অক্ষত প্ৰতিবিম্ব হ'ব $(-2, +2)$।

তেনেদৰে প্ৰতিটো বিন্দু (x, y)ৰ প্ৰতিবিম্ব হ'ব (-x, +x)। (-3, -3)ৰ প্ৰতিবিম্ব (3, -3)। লেখ কাকতত চালে বেছি সহজ পাবা। গতিকে এই আটাইবোৰ প্ৰতিবিম্ব লগ লাগিয়ে প্ৰতিফলনৰ ৰেখাটো গঠিত হ'ব।

এতিয়া কোৱা x = yৰ প্ৰতিফলন কি?

প্ৰবাল ঃ বুজি পাইছো ছাৰ। x =yৰ Y- অক্ষত প্ৰতিফলনটো বোৰ্ডত অঁকা আছেই; অৰ্থাৎ x = -y।

ছাৰ ঃ আকৌ কোৱা এই x =yৰ X-অক্ষত প্ৰতিফলন কি?

প্ৰবাল ঃ ছাৰ, একেই অৰ্থাৎ x = -y, কাৰণ x = yৰ ওপৰৰ প্ৰতিটো বিন্দু (x, y)ৰ প্ৰতিবিম্ব (x, -y), অৰ্থাৎ x যিমান, yয়ো সিমান কিন্তু বিপৰীত।

ছাৰ ঃ বঢ়িয়া। আন ভাষাত আমি ক'ব পাৰো যে x = y আৰু x = -y দুয়ো X অক্ষতো প্ৰতিৰূপী আৰু Y-অক্ষতো প্ৰতিৰূপী (symmetrical about X axis, and Y-axis)।

এইবাৰ আহা, মই অইন এটা প্ৰশ্ন সোধো। আমি প্ৰথমতেই দিয়া চাৰিটা বিন্দু A, B, C, D, E, Fৰ কোনোবা এটাও x = y নাইবা x = -yৰ ওপৰত আছেনে?

নীলাক্ষি ঃ নাই ছাৰ, কাৰণ এইবোৰত x, y সমান বা বিপৰীতকৈ থকা এটা বিন্দুও নাই।

ছাৰ ঃ তেন্তে তুমি কোৱা A(0, 3) বিন্দুটোৰ x = yৰ ওপৰত প্ৰতিবিম্ব কি?

নীলাক্ষি ঃ ছাৰ, (অকণমান ভাবি) (3, 0) হ'ব যেন পাইছো।

ছাৰ ঃ কিয় বাৰু?

নীলাক্ষি ঃ কাৰণ ছাৰ, X-অক্ষৰ প্ৰতিফলন x = y ৰেখাত Y-অক্ষটো হ'ব। তেনেদৰে Y-অক্ষৰ প্ৰতিফলন X-অক্ষ। গতিকে (0, 3)ৰ x =y ৰেখাত প্ৰতিবিম্ব হ'ব (3, 0)। তেনেদৰে B = (2, 5)ৰ প্ৰতিবিম্ব (5, 2), C = (-2, 5)ৰ প্ৰতিবিম্ব (5, -2) ইত্যাদি। সেইদৰে সমতলৰ যিকোনো বিন্দু (x, y)ৰ প্ৰতিবিম্ব x = y ৰেখাৰ ওপৰত হ'ব (y, x)

ছাৰ ঃ তেনেদৰে এতিয়া কোৱাচোন x = -y ৰেখাৰ ওপৰত D, E, F বিন্দুকেইটাৰ প্ৰতিবিম্ব কি হ'ব?

নীলাক্ষি ঃ ছাৰ, যি কোনো বিন্দু (x, y)ৰ প্ৰতিবিম্ব x = -yৰ ওপৰত হ'ব (-y, -x)।

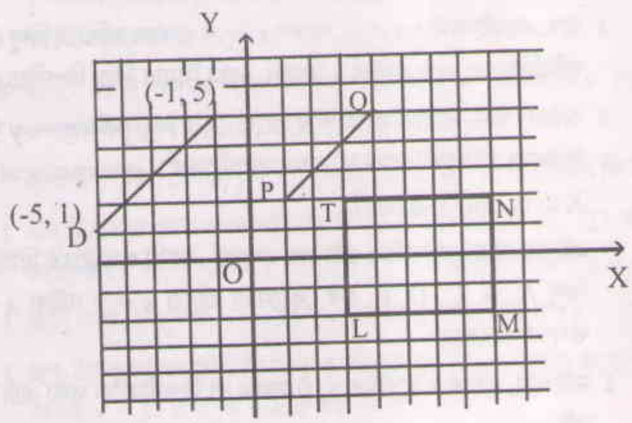
গতিকে

D = (-3, 4)ৰ প্ৰতিবিম্ব হ'ব (-4, 3)

E = (0, 6) ৰ প্ৰতিবিম্ব হ'ব (-6, 0)

F = (-1, -5)ৰ প্ৰতিবিম্ব হ'ব (5, 1)

ছাৰ ঃ ধন্যবাদ। এতিয়া বাৰু আমি অলপ বেলেগ কথালৈ আহো— একেই স্থানাংক সমতলত। মই বৰ্গবোৰ্ডখন মচি আকৌ নতুনকৈ সজালো। ধৰা



ইয়াত PQ এটা খণ্ড ৰেখা। Pৰ স্থানাংক (1, 2) আৰু Qৰ স্থানাংক (4, 6)। P আৰু Qৰ সম্বন্ধ কি?

নয়ন ঃ ছাৰ Pৰ x স্থানাংক 3 ঘৰ বাঢ়ি গৈছে আৰু y স্থানাংক 4 ঘৰ বাঢ়ি গৈছে।

ছাৰ ঃ হয়, এতিয়া ধৰা মই এটা বিন্দু A = (0, 3)ক PQৰ দিশত আৰু PQ)ৰ সমান দূৰত্বলৈ স্থানান্তৰ কৰিব বিচাৰিছো, তেন্তে Aৰ নতুন স্থানান্তৰিত বিন্দুটো কি হ'ব?

ময়ূৰ ঃ ছাৰ মই কও। Aৰ x স্থানাংক গৈ 0 +3 আৰু y-স্থানাংক 3 গৈ 3+4 হ'ব, অৰ্থাৎ Aৰ নতুন স্থান A′ টো হ'ব (3, 7)।

ছাৰ ঃ ভেৰি গুড। একেদৰে তোমালোকে বাকী আটাইকেইটা বিন্দুক স্থানান্তৰ কৰি নতুন স্থানান্তৰিত বিন্দুকেইটা লিখা।

(আটায়ে লিখাৰ পিছত) এতিয়া প্ৰত্যেক প্ৰত্যেকৰ লগত মিলাই চোৱা।

যদি কাৰোবাৰ ভুল হৈছে শুধৰাই লোৱা। (...অলপ পিছত)

ধৰা মই D = (-3, 4) বিন্দুটোত PQ দিশত আৰু PQ সমান দৈৰ্ঘ্যত এটা খণ্ডৰেখা আঁকিব খুজিছো। কিদৰে আঁকিবা ? অংকিতে এইবাৰ ক'ব।

অংকিত ঃ ছাৰ, Pৰ পৰা Q যিদৰে পাও একেদৰে D বিন্দুৰ স্থানৰ পৰা স্থানান্তৰিত বিন্দু D′ পাবলৈ হ'লে D′ৰ x স্থানাংক হ'ব -3 + 3 আৰু y-স্থানাংক হ'ব 4+4 ; অৰ্থাৎ D′ হ'ব (0, 8)। ছাৰ খণ্ডৰেখাটো মই বোৰ্ডত আঁকি দিও ?

ছাৰ ঃ আহা (অংকিতে গৈ ওপৰৰ চিত্ৰত দেখুৱাৰ দৰে আঁকি দিয়ে) গুড্, তোমালোকে ঘৰত বাকী কেইটা বিন্দুৰ পৰাও এনেদৰে PQক স্থানান্তৰ কৰিবা। একেদৰে স্থানাংক সমতলত যিকোনো চিত্ৰ এটাকে কোনো নিৰ্দ্দিষ্ট দিশত আৰু নিৰ্দ্দিষ্ট ঠাইত স্থানান্তৰ কৰিব পৰা যায়।

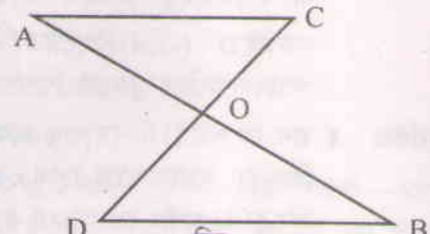
এতিয়া ধৰা মই x-অক্ষত প্ৰতিৰূপী এটা আয়তক্ষেত্ৰ LMNT আঁকিলো, য'ত L = (3, -2), M = (8, -2) N = (8, 2) আৰু T = (3, 2) (বোৰ্ডত আঁকি দিয়ে)। এই আয়তটোক তোমালোকে X = Y ৰেখাত প্ৰতিফলন কৰি নতুন চিত্ৰটো আঁকিবা। অঁকাটো উজু হ'ব যিহেতু তোমালোকে X = Yত প্ৰতিটো শীৰ্ষবিন্দুৰে প্ৰতিবিম্ব উলিয়াব জানাই। দ্বিতীয়তে মই তোমালোকক আৰু দুটা প্ৰশ্ন দিলো— মই আঁকি থোৱা LMNT আয়তটোকে 90^0 বাওহাতে ঘূৰাই এটা নতুন আয়ত আঁকা। দ্বিতীয়তে আয়তটোক 180^0 বাওহাতে ঘূৰাই এটা নতুন আয়ত আঁকা।

এই তিনিটা কাম তোমালোকে ঘৰত কৰিব পাৰিলে মই বুজিম যে তোমালোকে প্ৰতিফলন, স্থানান্তৰ আৰু আনকি ঘূৰ্ণন (rotation)ৰ কথাও ভালদৰে বুজিছা।

প্ৰবাল ঃ ছাৰ, গোটেই চিত্ৰ এটাক কোনো এটা কোণত ঘূৰোৱাৰ অৰ্থ কি ?

ছাৰ ঃ সম্পূৰ্ণকৈ ঘূৰোৱাৰ অৰ্থ হ'ল, গোটেই চিত্ৰটোৰ প্ৰতিটো বিন্দুকে একে দিশত সেই কোণত ঘূৰাই চিত্ৰ এটা পোৱাটো। স্থানাংক পদ্ধতিত বিন্দুবোৰক যি কোনো এটা কোণত ঘূৰাই পোৱা বিন্দুবোৰ উলিয়াবলৈ অৱশ্যে আমি ত্ৰিকোণমিতিৰ পদ্ধতিহে ল'ব লগা হয়। সেইটো অলপ জটিল, হ'লেও আমি কিন্তু সাধাৰণ 90^0, 180^0 বা 360^0 আদি কোণত চিত্ৰ এটা সহজে ঘূৰাই ল'ব পাৰো।

এটা উদাহৰণ চোৱা। ধৰা আমি চিত্ৰ-(a)ক O বিন্দুত 180^0 ঘূৰাব লাগে। চিত্ৰটোত AO = BO আৰু CO = OD। ঘূৰ্ণন চিত্ৰটো কি হ'ব?



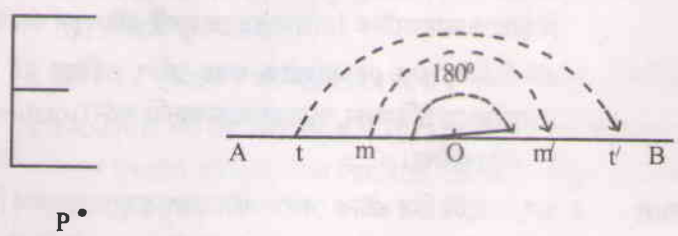
চিত্ৰ - a

ময়ূৰ ঃ ছাৰ, 180^0ত ঘূৰালে C বিন্দুটো আহি D পাব, A বিন্দু আহি B পাব। ঠিক একেদৰে মাজৰ বিন্দুবোৰেও চিত্ৰটোৰ ওপৰতে একোটা বিন্দুত পৰিব। গতিকে ইয়াত চিত্ৰটো একেই থাকিব।

ছাৰ ঃ তুমি সুন্দৰকৈ চিন্তা কৰিছা। বাৰু কোৱা এই চিত্ৰটো প্ৰতিৰূপী হয়নে? ৰূণুমী কি কোৱা?

ৰূণুমী ঃ ছাৰ, চিত্ৰটোত বোধহয় প্ৰতিৰূপীৰ ৰেখা নাই, কিন্তু ই বিন্দু প্ৰতিৰূপী হ'ব। প্ৰতিৰূপী কেন্দ্ৰ হ'ব O।

ছাৰ ঃ বঢ়িয়া। এইবাৰ চোৱা মই এটা চিত্ৰ আঁকিছো। চিত্ৰটো E আৰু এটা বিন্দু P। এতিয়া P বিন্দু সাপেক্ষে E চিত্ৰটোক ঘূৰাব লাগে। মন কৰিবা যে যদি AOB এটা সৰলৰেখা তেন্তে 180^0 কোণত ঘূৰালে AOৰ মাজৰ

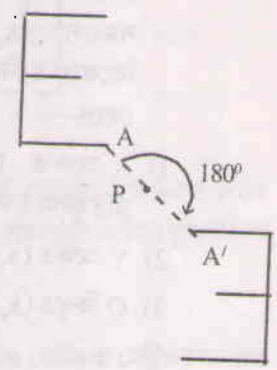


বিন্দুবোৰে OBৰ মাজত আৰু Oৰ পৰা সমান দূৰত্বত পৰিব ; অৰ্থাৎ AO, OBৰ ওপৰত পৰিব। ইয়াত AOৰ O বিন্দুত প্ৰতিফলন হ'ব OB, নাইবা AB, O কেন্দ্ৰত বিন্দু প্ৰতিৰূপী।

এতিয়া P বিন্দুত Eক ঘূৰাই আমি কি পাম? Eৰ প্ৰতিটো বিন্দুৰ লগত P সংযোগ কৰি মনতে সেই সংযোগী ৰেখাটোত বিন্দুটোৰ প্ৰতিবিম্ব লোৱা।

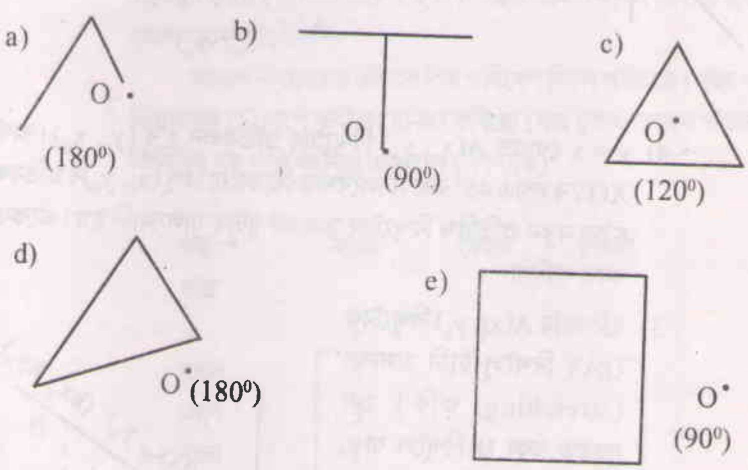
এই প্ৰতিবিম্বিত বিন্দুবোৰে তোমাক Eৰ ওলোটা চিত্ৰ এটা দিব। হয়নে ভাবি চাবা।

এটা কাম কৰা। চিত্ৰটো এখন সৰু ট্ৰেচিং পেপাৰত আঁকি লোৱা। O বিন্দুত এটা পিন মাৰি আৰু চিত্ৰটোৰ যিকোনো বিন্দু Aৰ লগত P লগলগোৱা এটা ৰেখা টানি ৰেখাটোত চিত্ৰটোক 180^0 ঘূৰাই দিলেই ঘূৰ্ণন চিত্ৰটো পাবা, যিটো Eৰ বিপৰীত।



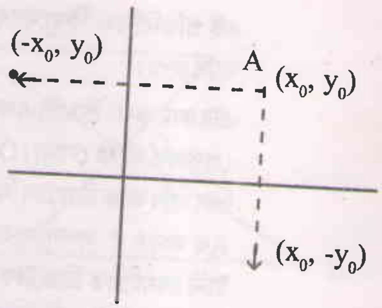
নীলিমা : ছাৰ, আমাক দুটামান বেলেগ চিত্ৰ দিয়ক আমি পাৰোনে চেষ্টা কৰি চাও।

ছাৰ : ভাল কথা, নকলেও মই নিজেই দিলোহেঁতেন। তলৰ চিত্ৰকেইটা কাষত উল্লেখ কৰা কোণত O বিন্দুত ঘূৰাই ঘূৰ্ণনৰ চিত্ৰবোৰ আঁকি আনিবা (ঘূৰ্ণনবোৰ ঘড়ীৰ কাঁটাৰ দিশত)



আজি আমি বিদায় লোৱাৰ আগতে এই প্ৰক্ৰিয়াসমূহ ফলবতী কৰা কেইটামান মনোৰঞ্জক আৰ্হিৰ কথা তোমালোকক দেখুৱাম।

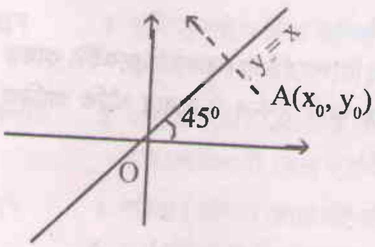
তোমালোকে মনত পেলোৱা যে যদি স্থানাংক সমতলত (x_0, y_0) এটা যিকোনো নিৰ্দ্দিষ্ট বিন্দু, তেন্তে—

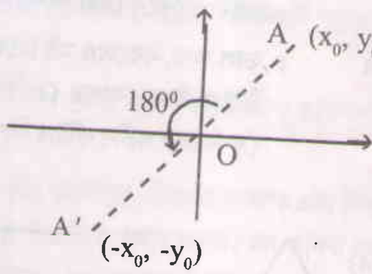


1) X-অক্ষত (x_0, y_0)ৰ প্ৰতিফলন হ'ল $(x_0, -y_0)$

2) Y-অক্ষত (x_0, y_0)ৰ প্ৰতিফলন হ'ব $(-x_0, y_0)$

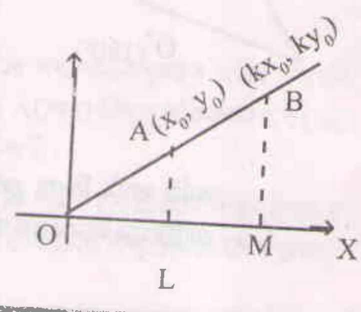
3) O বিন্দুত (x_0, y_0)য়ে 180^0 ঘূৰ্ণনত হ'ব $(-x_0, -y_0)$





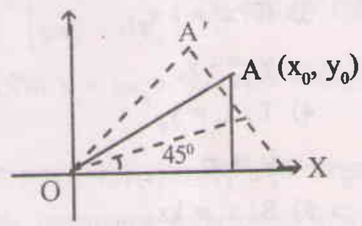
4) y = x ৰেখাত $A(x_0, y_0)$ বিন্দুটোৰ প্ৰতিফলন হ'ব (y_0, x_0)। অৰ্থাৎ XOYৰ লগত 45^0 কৰা সৰলৰেখাত যিকোনো বিন্দু (x_0, y_0)ৰ প্ৰতিফলন হ'লে নতুন প্ৰতিবিম্ব বিন্দুটোৰ স্থানাংক দুটাৰ সালসলনি হয়। একেদৰে মনত ৰাখিবা—

5) যদি আমি $A(x_0, y_0)$ বিন্দুটোক OAৰ দিশলৈ টানি প্ৰসাৰণ (stretching) কৰি k গুণ দূৰত্বত থকা B বিন্দুলৈ যাও, তেন্তে নতুন B বিন্দুৰ স্থানাংক হ'ব (kx_0, ky_0)। তোমালোকে সদৃশ ত্ৰিভুজৰ বাহুৰ অনুপাত ধৰ্ম



প্ৰয়োগ কৰি Bৰ স্থানাংক সহজে উলিয়াব পাৰিবা। প্ৰকৃততে এই পদ্ধতিৰেই কোনো চিত্ৰৰ স্কেল পৰিবৰ্তন কৰি চিত্ৰক হ্ৰাস বা বৰ্দ্ধন কৰা হয়।

6) ধৰা আমি $A(x_0, y_0)$ বিন্দুটো থকা OA ৰেখাটো 45^0 কোণত ঘূৰাই Aক A′ লৈ নিয়া হ'ল। তেন্তে A′ৰ স্থানাংক উলিয়ালে তোমালোকে ত্ৰিকোণমিতিৰ সহায়ত এইদৰে পাবা। নতুন স্থানাংক (x_1, y_1) ধৰিলে—



$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_0 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_0$$

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_0$$

এতিয়া ধৰা এই ওপৰৰ প্ৰক্ৰিয়াকেইটাক আমি কিছুমান নাম দিলো, এইদৰে, ওপৰৰ পৰা—

1) X-অক্ষত প্ৰতিফলনক → P
2) Y-অক্ষত প্ৰতিফলনক → Q
3) O বিন্দুত 180^0 ঘূৰ্ণনক → R
4) y = x ৰেখাত প্ৰতিফলনক → T
5) এটা দিশত প্ৰসাৰণ → S
6) 45^0ত ঘূৰ্ণনক → W

আকৌ ধৰা এই প্ৰক্ৰিয়াবোৰৰ ফলত $A = (x_0, y_0)$ বিন্দুটো গৈ $A' = (x_1, y_1)$ স্থানত উপনীত হয়। তেন্তে এই প্ৰক্ৰিয়াকেইটাক আমি এইদৰে গাণিতিক ভাষাত লিখিব পাৰো— হয়নে নহয় চাবা।

1) $P : x_1 = x_0$ নাইবা $x_1 = 1.x_0 + 0.y_0$
$y_1 = -y_0$ $y_1 = 0.x_0 - 1.y_0$

2) $Q: x_1 = -x_0$ $\quad y_1 = y_0$ $\qquad x_1 = -1.x_0 + 0.y_0$ $\quad y_1 = 0.x_0 + 1.y_0$

3) $R: x_1 = -x_0$ $\quad y_1 = -y_0$ $\qquad x_1 = -1.x_0 + 0.y_0$ $\quad y_1 = 0.x_0 - 1.y_0$

4) $T: x_1 = y_0$ $\quad y_1 = x_0$ $\qquad x_1 = 0.x_0 + 1.y_0$ $\quad y_1 = 1.x_0 + 0.y_0$

5) $S: x_1 = kx_0$ $\quad y_1 = ky_0$ $\qquad x_1 = kx_0 + 0.y_0$ $\quad y_1 = 0.x_0 + ky_0$

6) $W: x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} x_0 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_0, \; y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} x_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_0$

নীলাক্ষি : ছাৰ, এইদৰে কিয় লিখিবলগীয়া হ'ল ? আমি টান পাইছো।

ছাৰ : দেখাত অলপ টান বুলি হয়তো প্ৰথমে ভাবিব পাৰা। কিন্তু মই এইদৰে লিখি উলিওৱাৰ উদ্দেশ্যই হ'ল গাণিতিক প্ৰতিসমতা আৰু কল্পনাৰ মাজত কি সৌন্দৰ্য্য আৰু আৰ্হি লুকাই আছে তাকে তোমালোকক চিনাকী কৰাই দিয়া। মন কৰা যে সোঁহাতৰ সমীকৰণৰ আটাইবোৰ প্ৰকাৰেই বৈশিষ্ট্যপূৰ্ণ। আটাইবোৰ প্ৰক্ৰিয়াকে আমি —

$x_1 = ax_0 + by_0$

$y_1 = cx_0 + dy_0$ ঠিক এনে একোটা আৰ্হিত চমুকৈ প্ৰকাশ কৰিব পাৰো, য'ত a, b, c, d কিছুমান স্থিৰ সংখ্যা।

ময়ূৰ : ছাৰ, ওপৰৰ বাওঁহাতত থকাবোৰহে দেখোন বেছি চমু আছিল।

ছাৰ : তুমি ভাল কথাই ভাবিছা। কিন্তু তাত আৰ্হি গঠনৰ কোনো ধাৰণা নাই। আৰু অলপ ধৈৰ্য ধৰিলে মই বিচৰা কথাবোৰ বুজিবা। তোমালোকে মেট্ৰিক্সৰ মহতালিৰ উমান আগতে পাইছা। ওপৰৰ সমীকৰণ দুটাক প্ৰকৃততে মেট্ৰিক্সৰ আৰ্হিত আমি এইদৰে লিখিব পাৰো—

$$\begin{aligned} x_1 &= ax_0 + by_0 \\ y_1 &= cx_0 + dy_0. \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \qquad \text{(i)}$$

নিপুকণ ঃ কেনেকৈ ছাৰ?

ছাৰ ঃ কাৰণ, গুণন কৰিলে $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_0 + by_0 \\ cx_0 + dy_0 \end{pmatrix}$ হ'ব, আৰু দুটা মেট্ৰিক্সৰ সমতাৰ ধৰ্ম মতে প্ৰথম মৌল $x_1 = ax_0 + by_1$ আৰু দ্বিতীয়মৌল $y_1 = cx_0 + by_0$ হয়।

বিপৰীতভাৱেও এই কথাটো সত্য কাৰণে (i) নং বিবৃতি দুটা সমতুল্য।

গতিকে এতিয়া এই আৰ্হিত তোমালোকে আমি ওপৰত লিখি অহা প্ৰক্ৰিয়াকেইটা প্ৰকাশ কৰি চোৱা। আহাচোন কোনোবা এজন বোৰ্ডলৈ।

নীলিমা ঃ (উঠি আহি) মই কৰি চাও ছাৰ, আপুনি কিন্তু ওচৰত থাকিব।
(বুলি নীলিমাই লিখি যায়, ছাৰে মাজে মাজে সহায় কৰি দিয়ে।)

$$P : \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}; \quad Q = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$R : \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$S : \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}; \quad W = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

ছাৰ ঃ ভেৰি গুড্। তুমি W অৰ্থাৎ 45^0 ঘূৰ্ণনটোক এইদৰেও লিখিব পাৰা —

$$W : \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

বাৰু যিয়েই নহওক, চোৱা, আমি প্ৰতিবাৰতে কি কৰিছো, (x_0, y_0) বিন্দুটোক কোনোবা এটা 0 আৰু 1 থকা মেট্ৰিক্সৰে কৰা পূৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰ ফলত

স্থানান্তৰিত নতুনটো বিন্দু (x_1, y_0) পাইছো। গতিকে মন কৰা—

1) P অৰ্থাৎ X-অক্ষত প্ৰতিফলনৰ বাবে ব্যৱহাৰ কৰিছো মেট্ৰিক্স $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2) Q অৰ্থাৎ Y-অক্ষত প্ৰতিফলনৰ বাবে ব্যৱহাৰ কৰিছো মেট্ৰিক্স $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) R অৰ্থাৎ O-বিন্দুত 180^0 ঘূৰ্ণনৰ বাবে ব্যৱহাৰ কৰিছো মেট্ৰিক্স $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

4) T অৰ্থাৎ $y = x$ ৰেখাত প্ৰতিফলনৰ বাবে ব্যৱহাৰ কৰিছো মেট্ৰিক্স $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

5) S অৰ্থাৎ এটা দিশত k গুণ প্ৰসাৰণৰ বাবে ব্যৱহাৰ কৰিছো মেট্ৰিক্স $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

আৰু,

6) W অৰ্থাৎ (x_0, y_0) বিন্দুটোক O সপেক্ষে 45^0 ঘূৰ্ণনৰ বাবে ব্যৱহাৰ কৰিছো $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ মেট্ৰিক্সটো।

এতিয়া যদি তোমালোকক $A = (x_0, y_0)$ বিন্দুটো দিয়া হয়, তেন্তে এই বিন্দুটোক কিবা এটা ওপৰৰ প্ৰক্ৰিয়া কৰিব দিয়া হ'লে তেন্তে কোনটো বিন্দু পাবা উলিয়াব পাৰিবানে?

নীলাক্ষি ঃ পাৰিম ছাৰ।

ছাৰ ঃ বাকীবোৰে?

আটায়ে ঃ চেষ্টা কৰি চাম ছাৰ; দিয়ক ছাৰ।

ছাৰ ঃ আৰু এটা কথা। ধৰা তোমালোকে (4, 5) বিন্দুটো $y = x$ ৰেখাত প্ৰতিফলন কৰি X-অক্ষত আকৌ প্ৰতিফলন কৰিব লাগে। তেতিয়া আমি কি বিন্দু পাম? তেতিয়া তোমালোকে (x_0, y_0) বিন্দুটোৰ ওপৰত প্ৰথমে T প্ৰয়োগ

কৰি পিছত P প্ৰয়োগ কৰিব লাগিব। দুবাৰ বেলেগে নকৰি দুয়োটা প্ৰক্ৰিয়াক একেবাৰতে এইদৰে লিখা—

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = PT\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

মন কৰিবা যে $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ ৰ লগত PT হে গুণনত আছে, TP নহয় ; কাৰণ প্ৰথম প্ৰক্ৰিয়াটো T.

অংকিত, কোৱাচোন RSQ $\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ ৰ অৰ্থ কি?

অংকিত : ছাৰ (7, -1) বিন্দুটোৰ ওপৰত প্ৰথমে Q, অৰ্থাৎ Y-অক্ষত প্ৰতিফলন কৰি পিছত S, অৰ্থাৎ এটা দিশত প্ৰসাৰণ কৰি তাৰ পিছত R, অৰ্থাৎ O বিন্দুত 180^0 ঘূৰ্ণন কৰাব লাগে।

ছাৰ : বঢ়িয়া। অৱশ্যে ইয়াত আমি S বোলোতে কিমান গুণ প্ৰসাৰণ কৰিম কৈ দিয়া থাকিব। এতিয়া তোমালোকে তলত লিখা প্ৰক্ৰিয়াবোৰ কৰি আনিবা। বিন্দুবোৰ কাষতে দিয়া আছে।

(1) Q : (3, -2) (ii) T : (4, 7) (iii) W (9, 3)

(iv) RP : (5, 9) (v) QTP : (4, 1) (vi) STW (-3, 5)

তেন্তে আজিলৈ আমি আহো। পিছদিনা আমি সম্পূৰ্ণ নতুন এটি অধ্যায়লৈ গুচি যাম।

আটায়ে : ধন্যবাদ ছাৰ। নমস্কাৰ!!

* * * * * * *

অষ্টম দিন

চিধাৰেখাৰে বেকা যাদুচিত্ৰ ঃ —মোৰ কলিজাটো

।। চাওঁতে চাওঁতে এসপ্তাহৰো অধিক কাল সুন্দৰীদিয়া ঠাইখনৰ নিৰ্জন নিজান প্ৰাকৃতিক পৰিবেশৰ আচলত অচিনাকী পৰিভ্ৰমী বিহংগৰ দৰে জাকপাতি নামি পৰা গণিতপ্ৰেমীবোৰৰ মাজত গণিতৰ ৰূপৰস গন্ধৰ আমালমোল বাঢ়িবহে ধৰিলে। নন্দন প্ৰতীম, বেদান্তকে ধৰি বিভিন্নজন ছাৰৰ সান্নিধ্যত কিশোৰ, নয়ন, নিয়ন, ইলিমা, নীলিমা, কংকন, নিপুকণ, বাপিকণ আদি লিমাকণবোৰে গণিতৰ বিভিন্ন বাতাবৰণৰ ৰংঘৰটোৰ মাজৰ পৰা ওলাব নোখোজা হ'ল। কিন্তু—

'ৰাইজ আজি ভাৱৰীয়া, দেশেই নাটঘৰ
কোনে কি ভাও ল'বা আহা, সময় যে তাকৰ।'

—আৰু মাত্ৰ তিনিটা দিন। বৈচিত্ৰ্যময় অন্তহীন অলোক গাণিতিক সৰল ক্ষেত্ৰখনৰ পৰা কোনবোৰ কাঢ়ি আনিনো ৰোমাণ্টিক মনৰ কোমল মনবোৰত দাণ্ডি ধৰিব পাৰি— এনে সমস্যাই কেন্দ্ৰ সঞ্চালক ছাৰ-বাইদেউহঁতৰ মনত খুদুৰনি লগাইছিল।

যিয়েই নহওক আজিৰ বাবে নিমন্ত্ৰিত অতিথি বক্তা আহিল তেজপুৰৰ ৰাণু বৰুৱা বাইদেউ।

* * * * * * *

বৰুৱা শ্ৰেণীত সোমাল। ছাত্ৰ-ছাত্ৰীয়ে নতুন বাইদেউ এগৰাকী দেখি ভালো পালে আৰু আগৰ ছাৰহঁতৰ কথা মনত পৰি মনত অলপ দুখো লাগিল। চা-চিনাকি হোৱাৰ পিছত ৰাণু বাইদেউৰে ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলৰ এই কেইদিনৰ শ্ৰেণীবোৰৰ বুজ ল'লে। অলপ পিছতে অৰ্জুন বাহাদুৰে হাতত দুটামান ম'ডেলৰ বেগ আনি টেবুলত সজাই থ'লে।।

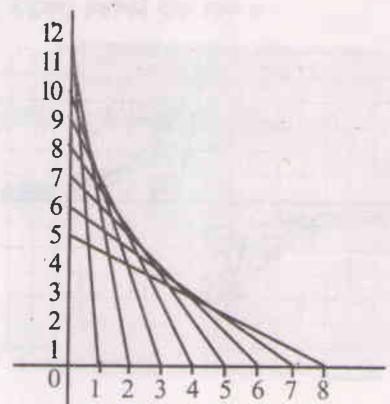
বাইদেউৱে ক'লে— কিশোৰ মইনাহঁত! মই আজি তোমালোকক কেইটামান অচিনাকী জ্যামিতিক চিত্ৰৰ কথা কম। প্ৰকৃততে আমি খেলা-ধূলাৰ ছলেৰেই এই মনোমোহা চিত্ৰবোৰ সজাই ল'ব পাৰিম। তোমালোকে কল্পনা কৰাচোন—

সৰলৰেখাৰে জানো বেকাচিত্ৰ গঠন কৰিব পাৰি? তাৰোপৰি এই বেকাচিত্ৰটো যদিহে মনোমোহা যাদুচিত্ৰ হ'ব লগীয়া হয়। এৰা, কথাটো এনেকুৱা, যেন যাদুকৰ এজনে আকাশত নিজৰ হাতৰ যাদুমাৰিডাল অকাই পকাই যেন শূন্যতে এটা চিত্ৰ আঁকিব। হয়, গণিতজ্ঞবোৰো একপ্ৰকাৰ যাদুকৰো।

আমি এনে চিত্ৰ গঠন কৰাৰ দুই এটা সহজ পদ্ধতি ইয়াত আলোচনা কৰিম।

কিছুমান সৰলৰেখাৰ থুপ এটাক আমি যদি এক বিশেষ ধৰণে সজাও তেন্তে আমি দেখা পাম যে ইহঁতে এটা মনোমোহা বক্ৰ উৎপন্ন কৰিছে। এই ক্ষেত্ৰত এনেদৰে উদ্ভৱ হোৱা বক্ৰবোৰৰ নাম দিয়া হয় আপৰিবদ্ধ (envelope) আৰু সৰল ৰেখাবোৰক বোলা হয় আপৰিবদ্ধক।

ডাঠ বোৰ্ড বা প্লাইবোৰ্ড কাঠেৰে কিছুমান সৰু সৰু ম'ডেল বনাই তাৰ বা ডাঠ সূতাৰ সহায়ত এই চিত্ৰবোৰ গঢ়িলে বেছি শুৱনী হ'ব। তাৰ আগতে তোমালোকে চাৰ্ট পেপাৰত আঁকিও কৰি চাব পাৰিবা।



নীলিমা ঃ আমি বাইদেউ চাৰ্ট আৰু গ্ৰাফ দুয়োবিধ পেপাৰেই আনিছো।

বাইদেউ ঃ তেন্তে X আৰু Y অক্ষৰ দৰে দুটা পৰস্পৰ লম্ব ৰেখা আঁকা আৰু ৰেখা দুটাৰ ওপৰত সমদূৰত্বত বিন্দু কিছুমান লোৱা। বিন্দুবোৰৰ নাম দিয়া O (মূলবিন্দু), 1, 2, 3, 4, ... আদি। বিন্দুবোৰ আধা ছেণ্টিমিটাৰমান দুৰত্বকৈ ল'লে ভাল।

এতিয়া বিন্দু 1ক ১২ৰ সৈতে 2ক 11ৰ সৈতে, 3ক 10 ৰ সৈতে ইত্যাদিকৈ সৰল ৰেখাৰে সংযোগ কৰি যোৱা। কাঠৰ ফ্ৰেমত অক্ষদুডাল লৈ, বিন্দুবোৰ সৰু সজাল মাৰি সূতাৰে ৰেখাবোৰ বনালে ই এটা ভাল ম'ডেল হ'ব।

যিয়েই নহওক এই সৰল ৰেখাবোৰে এটা বক্ৰ উৎপন্ন কৰিব যাক

গণিতত অধিবৃত্ত (Parabpla) বোলে। দুটা সংযোগী বিন্দুৰ মাজৰ দূৰত্ব কম বেছি কৰি এই বক্ৰটোৰ আকৃতি বিভিন্ন ধৰণৰ কৰিব পাৰি।

নিপুকণ ঃ বাইদেউ, মোৰ বক্ৰটো আপোনাৰটোতকৈ বেছি ভিতৰ সোমোৱা হ'ল।

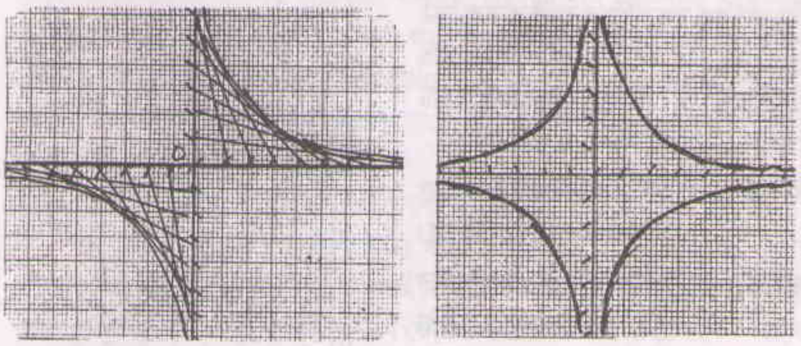
বাইদেউ ঃ কোনো কথা নাই। মুঠতে ই $y = x$ ৰেখাত প্ৰতিসম হ'লেই হ'ল।

অক্ষ ৰেখা দুটাৰ বিপৰীত দিশতো একে ধৰণে আন এটা বক্ৰ বনাব পাৰা। তলৰ চিত্ৰত কাঠবোৰ্ডৰ ম'ডেলত এনে এটা বক্ৰকে দুয়োপিনে বনাই দেখুৱা হৈছে।

এই বক্ৰ দুয়োটা মূলবিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা এটা সৰল ৰেখাৰ ($y = -x$) দুয়োপিনে প্ৰতিসম।

দুটা শাখা থকা এনে বক্ৰৰ নাম পৰাবৃত্ত (hyperbola)। এনে বিভিন্ন বক্ৰৰ লক্ষণ অনুসৰি বিভিন্ন নাম পাবা।

ওপৰৰ বক্ৰ নিৰ্ণয়ৰ ক্ষেত্ৰত মূল লম্বৰেখা দুটাকে অক্ষ হিচাপে লোৱা



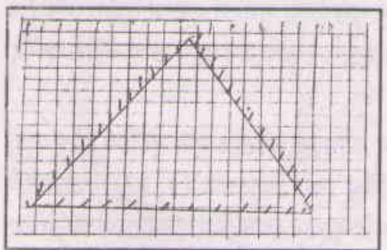
হৈছে। এনেদৰে নিৰ্মাণ কৰা ফ্ৰেমক লম্বজালী (Perpendicular grid) বুলি ক'ব পাৰি। জালীবোৰ লম্বৰেখা নধৰি অইন বিভিন্ন ধৰণৰো হ'ব পাৰে। যেনে ত্ৰিভুজীয়, বৰ্গীয়, পঞ্চভুজীয়, ষড়ভুজীয় আৰু আনকি বৃত্তীয় আদি লৈও বিভিন্ন ধৰণৰ আটাকধুনীয়া চিত্ৰ আৰ্হি গঢ়িব পাৰি। তলৰ চিত্ৰটো ত্ৰিভুজীয় আৰ্হিৰ জালীত বনাই দেখুওৱা হৈছে। (বাইদেউৱে টেবুলত সজোৱা বিভিন্ন আৰ্হি ছাত্ৰ-ছাত্ৰীক দেখুৱাই সেইবোৰৰ প্ৰয়োগ আৰু উপকাৰিতা ব্যাখ্যা কৰে।)

নীলাক্ষি ঃ বাইদেউ, এই চিত্ৰ আৰ্হিবোৰ এটা অংশ আপুনি কোৱাৰ দৰে গ্ৰাফ পেপাৰত

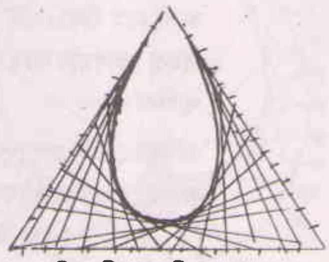
আঁকি দেখোন স্থানাংক পদ্ধতিৰে প্ৰতিবিম্ব বিন্দুবোৰ লৈও বাকী সমমিতিৰ অংশকেইটা আঁকিব পাৰো।

বাইদেউ ঃ পাৰিবা। কিন্তু আমাৰ উদ্দেশ্য চিধা ৰেখা লৈহে।

আকৌ চোৱা, তলৰ আৰ্হিকেইটা বিভিন্ন বহুভুজীয় জালীৰ সহায়ত উৎপন্ন



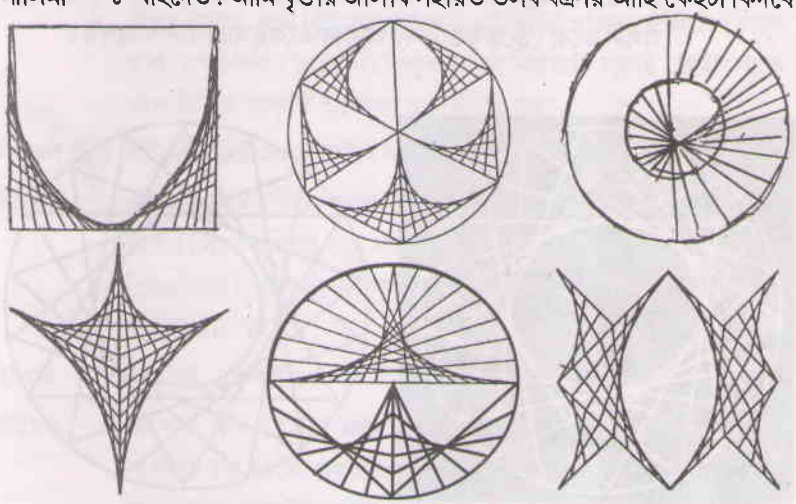
ত্ৰিভুজীয় জালী



ত্ৰিভূজীয় জালীৰ পৰা বক্ৰ

কৰিব পাৰি। জালীবোৰ নিজে সজাই এই আৰ্হিবোৰ গঠন কৰিবলৈ চেষ্টা কৰিবা। (এইবুলি বাইদেউৱে প্ৰতি ছাত্ৰ-ছাত্ৰীক আটাইবোৰ চিত্ৰৰ প্ৰতিলিপি একোটাকৈ হাতত দিয়ে।)

নীলিমা ঃ বাইদেউ! আমি বৃত্তীয় জালীৰ সহায়ত তলৰ বক্ৰীয় আৰ্হি কেইটা কিদৰে



গঠন কৰিব পাৰিম?

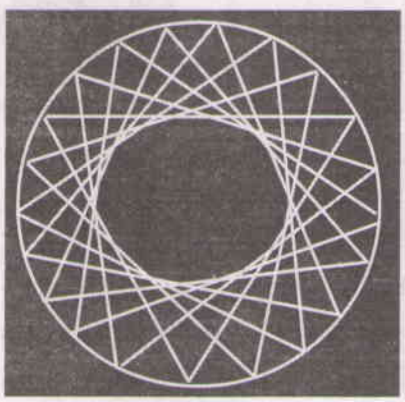
বাইদেউ ঃ আমি এতিয়া তাকেই কৰিম ; একো টান নহয়, চোৱা।

এখন চাৰ্ট পেপাৰত তলৰ চিত্ৰত দেখুৱা ধৰণে এটা বৃত্ত ডাঙৰকৈ আঁকা। এতিয়া বৃত্তৰ পৰিধিক সমানে 40 বা 36 বা 24 আদি যি কোনো যুগ্ম সংখ্যক সৰু সৰু ভাগত ভাগ কৰা। এতিয়া ভাগ বিন্দুবোৰক 1, 2, 3, ... আদি নাম দিয়া। এই ভাগবোৰ বৃত্তটোক সমানে দুভাগ, কৰি কৰি গৈ নাইবা কোণমান যন্ত্ৰৰ সহায়ত কেন্দ্ৰত কোণবোৰ জুখি ভাগ কৰিও কৰিব পাৰিবা।

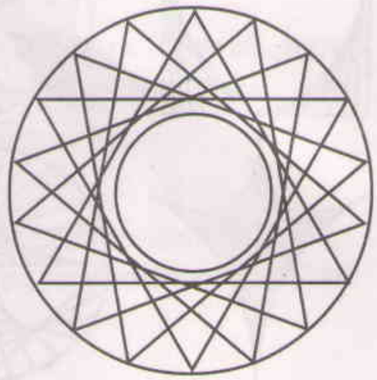
এতিয়া স্কেল এপাতেৰে সমান আঁতৰে আঁতৰে দুটা দুটাকৈ বিন্দু লগ লগাই ৰেখাবোৰ আঁকা, যেনে বিন্দু 1ক 12ৰ লগত, (1, 12), তেনেদৰে (2, 13), (3, 14)... ইত্যাদিকৈ বিন্দুবোৰ শেষ নোহোৱালৈকে আঁকি গৈ থাকা। (অলপ পিছত) কি দেখিলা?

মেঘালী ঃ বাইদেউ ৰেখাবোৰে মাজত এটা বৃত্ত বনালে, অৰ্থাৎ বৃত্তৰ ভিতৰত বৃত্ত। (আটায়ে হাঁহে)

প্ৰবাল ঃ বিন্দুবোৰ (1, 12), (2, 13)... হিচাপে লগ নলগাই (1, 20), (2, 21), (3, 22).... ইত্যাদি ৰূপে নাইবা ৰেখা জ্যাবোৰৰ দীঘ আৰু বেলেগকৈ সলনি কৰোঁ তেন্তে বৃত্তবোৰৰ আকাৰ একেই থাকিবনে বাইদেউ?

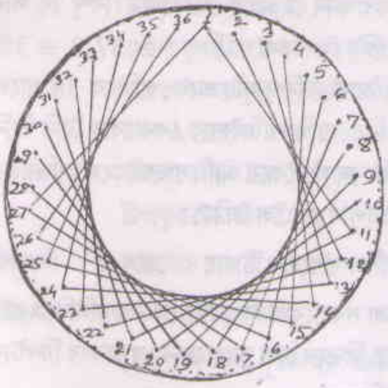


চিত্ৰ-১ ঃ ম'ডেল— বৃত্তীয় জালী (Circular ring)

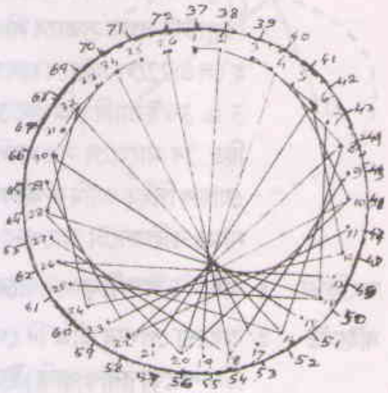


চিত্ৰ - ২

বাইদেউ ঃ নাথাকে, তেতিয়া ভিতৰত এইদৰে উৎপন্ন হোৱা বৃত্তবোৰৰ আকাৰো ডাঙৰ বা সৰু হ'ব। চেষ্টা কৰি চোৱাচোন।



চিত্ৰ - ৩



চিত্ৰ - ৪

চিত্ৰ-3 আৰু চিত্ৰ-4ৰ ফ্ৰেমৰ ভিতৰত থকা বক্ৰ দুটা মন কৰিছানে? কি দৰে বনোৱা হৈছে? চিত্ৰ-3ত আমি বনাইছো এগছি বন্তী শিখা। কোন বিন্দুৰ সৈতে কোন বিন্দু সংযোগ কৰি এই ধুনীয়া প্ৰতিসম নক্সাটো তৈয়াৰ হ'ল, লক্ষ্য কৰা। সংযোগী বিন্দুৰ দূৰত্বৰ নিয়মটো সলাই তোমালোকে এনে বিভিন্ন আকৃতি আকাৰৰ বক্ৰ নিৰ্মাণ কৰা।

নিপুকণ ঃ বাইদেউ, চিত্ৰ-4ৰ নক্সাটোৰ নাম কি বাৰু? চিনাকী যেন লাগিছে!

বাইদেউ ঃ এই বক্ৰটো মন দিলে বহুত ঠাইতে দেখা পাবা। ই এটা প্ৰায় আঁহত গছৰ পাতৰ সৈতে ৰজিতা থকা বক্ৰ। আমাৰ গণিতত ইয়াৰ নাম 'কাৰ্ডিয়ইড' (cardioid); আন ভাষাত 'বুকুৰ কলিজা'— আজিকালিৰ প্ৰতীকী ভাষাত 'I LOVE YOU'।

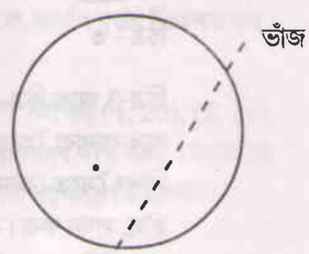
নীলিমা ঃ বাইদেউ, এই 'মই ভাল পোৱা' বক্ৰটো কিদৰে অঁকা হ'ল।

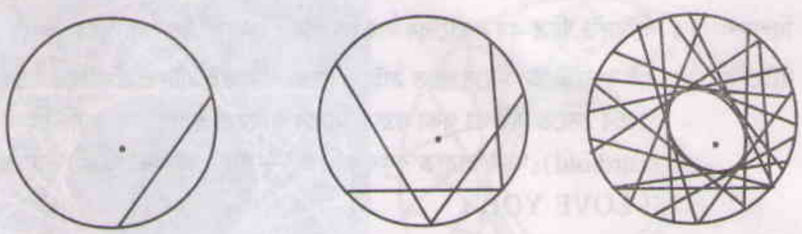
বাইদেউ ঃ মন কৰা, চিত্ৰ-1ৰ দৰে এখন জালী চাৰ্ট পেপাৰত আঁকি আৰু বিন্দুবোৰ পৰিধিত 1ৰ 36লৈ লোৱা হৈছে। আকৌ সেই একেবোৰ বিন্দুৰে 37ৰ পৰা 72লৈ দুবাৰকৈ বাহিৰ পিনে নাম দি লোৱা হৈছে। চিত্ৰ-4চোৱা। বিন্দুবোৰত সৰু পিন, গজাল মাৰি নাইবা ছিদ্ৰ (গজালেৰে ফুটা কৰি) একোটা কৰিব পাৰিলে বেছি ভাল। এতিয়া আমি মোটা বেজী সূতাৰে

বিন্দুবোৰক এইদৰে গুঠি যাম— বিন্দু 1ক 2ৰ লগত, বিন্দু 2ক 4ৰ লগত, বিন্দু 4ক 8ৰ লগত ইত্যাদিৰূপে এটা বিন্দুক ইয়াৰ পিছৰ দুগুণত থকা বিন্দুটোৰ লগত সূতাৰে সংযোগ কৰি মেৰুৱাই গৈ থাকিম। বিন্দু 36 পাৰ হ'লেও 72লৈ এইদৰে যাব লাগিব। মন কৰা যে বিন্দু $1 \equiv 37, 2 \equiv 38, 3 \equiv 39$ ইত্যাদি ; অৰ্থাৎ 38 আৰু 2 বিন্দু দুটা একে, গতিকে 38 পালে ছিদ্ৰ 2ৰ মাজেৰে সূতাডাল নিব লাগিব। এইদৰে ৰেখাবোৰ টানি টানি যোৱাৰ পিছত আমি লক্ষ্য কৰিম যে সঁচাকৈয়ে আমি নভবাকৈয়ে কাৰ্ডিয়ইড নামৰ কলিজাটো আপোনা-আপুনি গঢ় লৈ উঠিল।

অংকিতা ঃ বাইদেউ, জালী নবনোৱাকৈ কিবা বেলেগ উপায় আছেনে?

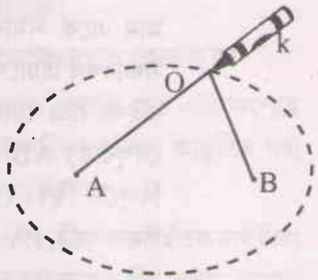
বাইদেউ ঃ অৱশ্যে পেপাৰ ভাঁজ দি পোৱা সৰলৰেখা কিছুমানেৰেও জ্যামিতিক বক্ৰ চিত্ৰ বহুতো বনাব পাৰি। ইয়াত কিদৰে চাও আহাচোন। বৃত্তাকাৰ ফিল্টাৰ পেপাৰ এখন লোৱা। চিত্ৰত দেখুওৱাৰ দৰে পৰিধিৰ পৰা অলপ ভিতৰত পেঞ্চিলেৰে এটা ফুট দিয়া। এতিয়া বৃত্তটো এনেদৰে ভাঁজ কৰা যাতে পৰিধিৰ এটা অংশ আহি বিন্দুটো চুৱে। ভাঁজটো খুলি ভাঁজটোত এটা ৰেখা টানা।





ঠিক একেদৰে এইবোৰ পৰিধিৰ অইন এটা অংশ আনি বিন্দুটো চুব দিয়া। আগৰদৰে ভাঁজটো খুলি ভাঁজটোত এটা ৰেখা টানা। এইদৰে বাৰে বাৰে বিন্দুটোলৈ পৰিধিটো আনি প্ৰায় 20/25 টা মান ৰেখা টানা। মন কৰা যে ৰেখাবোৰে এটা ডিম্বাকৃতিৰ বক্ৰ উৎপন্ন কৰিছে। বক্ৰটোৰ নাম উপবৃত্ত (ellipse)।

দুটা সৰলৰেখাই কটাকটি কৰা বিন্দু এটাৰ কক্ষপথ বনায়ো এনে বিভিন্ন আকৃতিৰ উপবৃত্ত বনাব পাৰি। সোঁকাষৰ চিত্ৰটো চালেই বুজি পাবা। ইয়াত A আৰু B খুটি দুটাত ঢিলাকৈ বন্ধা AOB ৰচীডাল OK পেঞ্চিল ডালেৰে টানি টানি বিন্দুবোৰ অঁকাত উপবৃত্তটো গঠন হৈছে।



নিপুকণ ঃ বাইদেউ! আমি পাৰোনে এটা এনে উপবৃত্ত বনাই চাও।

বাইদেউ ঃ আহা, তেনেই সহজ।

(নিপুকণ আৰু দুজনমান আহি নিজে কৰি চায়।)

ইয়াত এটা কথা লক্ষ্য কৰা যে O বিন্দুটো য'তেই নাথাকক কিয় AO + BO সদায় সমান।

নীলাক্ষি ঃ ও, হয় বাইদেউ। এই সমান সংখ্যাটো ৰচীডালৰ দীঘৰ সমান।

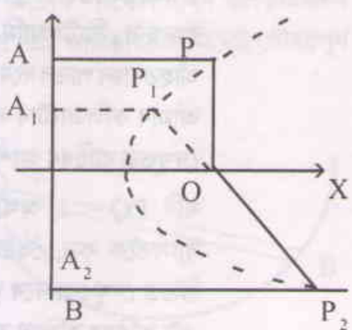
বাইদেউ ঃ অৰ্থাৎ উপবৃত্ত এটা বিন্দু Oৰ সঞ্চাৰপথ যাতে দুটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দু A আৰু Bৰ পৰা ইয়াৰ দূৰত্বৰ যোগফল সদায় একে।

নীলিমা ঃ বাইদেউ! ৰচীডালৰ দীঘ কম বেছি কৰিলেও বক্ৰটোৰ আকৃতি একেই থাকিবনে?

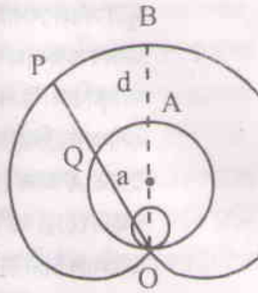
বাইদেউ ঃ নেথাকে। উপবৃত্তটোৰ আকৃতি বিভিন্ন ধৰণৰ হ'ব। তোমালোকে নিজে ঘৰত চেষ্টা কৰি চাবা।

কংকন ঃ আগতে কৰি অহা বক্ৰবোৰকো জানো আমি এনেদৰে কোনো বিন্দুৰ সঞ্চাৰপথ হিচাপে উলিয়াব পাৰিম?

বাইদেউ ঃ বেছিভাগকে পৰিবা। তাৰ ভিতৰত কিছুমান অতি সৰল আৰু কিছুমান জটিল। যেনে, অধিবৃত্তৰ বক্ৰটোক কেইযোৰ



মান একে সমান কাঠিৰে বিন্দুৰ সঞ্চাৰপথ হিচাপে দেখুৱাব পাৰিবা। এইখন চিত্ৰ চোৱা (কাষৰ চিত্ৰখন দেখুৱায়) AB ৰেখাটো স্থিৰ, O বিন্দুটো স্থিৰ। OP = OA দুডাল সমান কাঠি, PA $\perp$ AB| P বিন্দুটো যদি এনে স্থানত থাকে, যাতে সদায়েই OP = PA, তেন্তে এনে P বিন্দুৰ সঞ্চাৰপথটোৱে এটা অধিবৃত্ত। চিত্ৰত P_1, P_2 বিন্দুদুটা Pৰ এনে দুটা অৱস্থান। ইয়াতো $OP_1 = PA_1$, $OP_2 = P_2A_2$ ইত্যাদি।



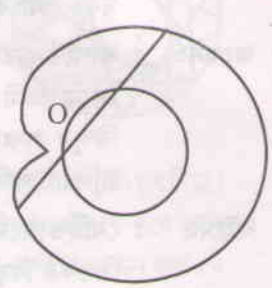
নীলাক্ষি ঃ বাইদেউ, ইয়াত বক্ৰটো কেতিয়া বেলেগ বেলেগ আকৃতিৰ হ'ব?

বাইদেউ ঃ ইয়াত আকৃতি নিৰ্ভৰ কৰিব O বিন্দুটো AB স্থিৰ ৰেখাৰ পৰা দূৰত্বৰ ওপৰত। বাৰু এতিয়া আমি একেদৰে এবিধ নতুন শ্ৰেণীৰ বক্ৰৰ কথা আলোচনা কৰিম।

চিত্ৰত চোৱা। OPA বৃত্তটো স্থিৰ। বৃত্তৰ ওপৰত O এটা স্থিৰ বিন্দু। বৃত্তৰ ব্যাস OAক এটা বিন্দু Bলৈ বঢ়াই দিয়া যাতে AB = d।

ধৰা PQO ৰেখাটো Oৰ মাজেৰে এনেদৰে আৱৰ্ত্তন কৰে যাতে Pৰ প্ৰত্যেক অৱস্থানতে QP = AB, অৰ্থাৎ PQ দুৰত্বটো সদায় ধ্ৰুবক d সমান।

ধৰা বৃত্তৰ ব্যাস = a আৰু যদি PQ = a লোৱা, তেন্তে P বিন্দুৰ সঞ্চাৰপথটো এটা বক্ৰ হ'ব ; যিটো আমি আগতে পাই অহা আঁহত গছৰ পাতৰ দৰে 'কাৰ্ডিয়ইড' অৰ্থাৎ আমাৰ কলিজাটোৰ দৰে, অৰ্থাৎ চিত্ৰত দেখুওৱা বাহিৰৰ অংশটোৰ দৰে।



যদি PQ < a অৰ্থাৎ PQ দুৰত্বটো ব্যাসতকৈ কম, তেন্তে বক্ৰটো ওপৰৰ চিত্ৰত দেখুওৱা দৰে দুটা শাখা থাকিব ; এটা বাহিৰৰ কলিজা আকৃতিৰ বক্ৰ আৰু আনটো ইয়াৰ ভিতৰত সৰু গাঁঠি

(loop)ৰ দৰে নাচপতিৰ আকৃতিত থকা বক্ৰ।

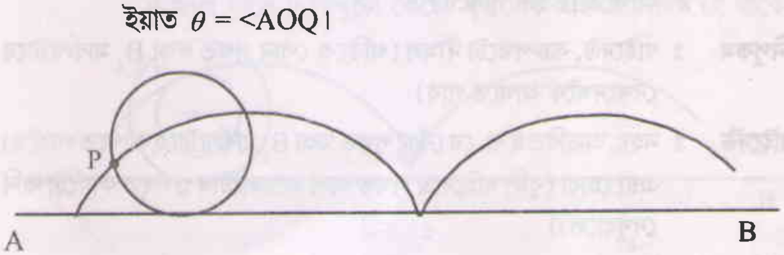
নীলিমা ঃ বাইদেউ, যদি PQ > a, তেন্তে কাৰ্ডিয়ইডটো দেখাত কেনে হ'ব?

বাইদেউ ঃ যদি PQ > a, তেন্তে বক্ৰটোৰ দুটা অংশ নাথাকি মাত্ৰ এটা অংশহে থাকিব। ইয়াত PQৰ দীঘ বাঢ়ি গ'লে ই বাহিৰৰ কলিজা আকৃতিৰ পৰা লাহে লাহে আগবাঢ়ি প্ৰায় এটা বৃত্তৰ আকৃতি ল'ব।

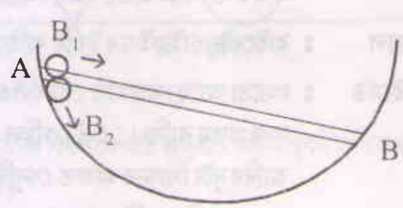
যিয়েই নহওক, এই তিনিওবিধ একে শ্ৰেণীৰ বক্ৰ, আৰু ইইঁতক নাম দিয়া হয় 'লিমাকণ' (ইংৰাজীত Limacon)। এই বক্ৰৰ কথা প্ৰথমে অধয়ন কৰিছিল ফৰাছী গণিতজ্ঞ ব্লেই পাস্কেলে, সেয়ে ইয়াক 'পাস্কেলৰ লিমাকণ' বুলিও কয়।

নিপুকণ ঃ বাইদেউ, এই লিমাকণবোৰৰ কিবা গাণিতিক নাম আছে নেকি?

বাইদেউ ঃ প্ৰত্যেকৰে আছে। তোমালোকে ত্ৰিকোণমিতি পঢ়িলেহে ভালদৰে বুজি পাবা। আমাৰ এই লিমাকণৰ গাণিতিক সমীকৰণীয় নামটো হ'ল $r = a\cos\theta + d$। গতিকে আগতে বনোৱা কাৰ্ডিয়ইডটোৰ নামো এই একেই। ইয়াত $\theta = <AOQ$।



আমি আজি এতিয়া প্ৰায় শেষ পৰ্যায়ত আলোচনা কৰিবলৈ লোৱা বক্ৰ এটাৰ নাম চাইক্লইড (cycloid) যিটোক পাস্কেল নামৰ গণিতজ্ঞজনৰ জীৱনৰ শেষ কৰ্ম বুলি গণ্য কৰা হয়। এই আৱিষ্কাৰটো ইমানেই গৌৰৱপূৰ্ণ আছিল যে ইয়াৰ বিভিন্ন ভৌতিক আৰু গাণিতিক ধৰ্ম আৰু সৌন্দৰ্যৰ বাবে ই সেই সময়ৰ গণিতজ্ঞসকলৰ মাজত এক মুখ্য আলোচনাৰ বস্তু



হৈ পৰিছিল। বহুতে এই বক্ৰটোক 'জ্যামিতিৰ হেলেন' নামেৰে অভিহিত কৰাৰ লগতে বহুতে আকৌ বিতৰ্কৰো সূচনা কৰিছিল। যিয়েই নহওক এই বক্ৰৰ ধৰ্মৰ আলোচনাই নিউটনৰ কলন গণিতৰো দূৰন্ত উন্নতিত অৰিহণা যোগাইছিল। আনকি এই বক্ৰটোৰ সন্দৰ্ভত পাস্কেলে নিজেই সৃষ্টি কৰা কিছুমান সমস্যাই পিছৰ গণিতজ্ঞসকলৰ প্ৰতি এক প্ৰত্যাহ্বানৰূপে দেখা দিছিল। পিছে এই 'হেলেন' নামৰ সুন্দৰী বক্ৰটোনো কি আৰু কিদৰে সৃষ্টি কৰিব পাৰি? চাও আহা।

এটা বস্তুই এটা সৰলৰেখাত গতি কৰিছে। বৃত্তৰ পৰিধিত P এটা স্থিৰ বিন্দু। বৃত্তটোৱে ঘূৰি যোৱাৰ লগে লগে P বিন্দুটোয়ে যিটো পথৰ সৃষ্টি কৰিব সেইটোৰ নামেই চাইক্লইড।

কাষৰ চিত্ৰটোলৈ আকৌ চোৱা। ধেনুভিৰীয়া পথটো চাইক্লইড। A এটা স্থানৰ পৰা AB সৰলৰেখীয় পথটোৰে এটা আৰু একে সময়তে একে সমান মাৰ্বল এটা চাইক্লইড পথটোৰে এৰি দিয়া। কোনটো মাৰ্বল গৈ আগতে B স্থান পাবগৈ?

নিপুকম ঃ বাইদেউ, বক্ৰপথটো দীঘল। গতিকে পোন পথত থকা B_1 মাৰ্বলটোৱে দেখদেখকৈ আগতে পাব।

বাইদেউ ঃ নহয়, আচৰিত হ'বা যে বেঁকা পথত থকা B_2 মাৰ্বলটোহে আগতে পাবগৈ। এয়া চোৱা (বুলি বাইদেৱে লগত অনা মডেলটোৰ ওপৰত কাৰ্যটো কৰি দেখুৱালে।)

নীলিমা/নীলাক্ষি ঃ এইটো কেনেকৈ, কেনেকৈ বাইদেউ!

বাইদেউ ঃ মই কেনেকৈ হ'ল জানো; কিন্তু এইটো গতিবিজ্ঞানৰ সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰিহে দেখুৱাব লাগিব কাৰণে তোমালোকে এতিয়াই বুজি নাপাবা। বৰ্তমান বিজ্ঞানী অভিযন্তাসকলে চাইক্লইডৰ এই ধৰ্মটো প্ৰয়োগ কৰি বিভিন্ন কাম কৰে। হিউজেন নামৰ গণিতজ্ঞ এজনে এই ধৰ্মটোক isochronous নাম দিছিল।

প্ৰবাল ঃ বাইদেউ, চাইক্লইডৰ ইয়াৰ বাহিৰেও অইন কিবা ব্যৱহাৰ আছে নেকি?

বাইদেউ ঃ বহুতো আছে। মহামতি গেলিলিওৱে ইয়াৰ বিভিন্ন ব্যৱহাৰৰ ওপৰত গৱেষণা কৰা প্ৰথম ব্যক্তি। তেওঁ কৈছিল যে এই বক্ৰটো ব্যৱহাৰ কৰি দলং, সাঁকো আদিৰ দুটা খিলনৰ মাজত ধেনুভিৰীয়া ডিজাইন কৰা; ইয়াৰ দুটা শীৰ্ষবিন্দুৰ মাজৰ কালিৰ পৰিমাণৰ ওপৰত ভিত্তি কৰাকে ধৰি বিভিন্ন কাৰ্যত ব্যৱহাৰ

কৰিছিল। ইয়াৰ গাণিতিক নাম—

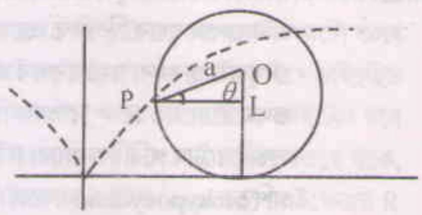
$x = a(\theta - \sin\theta)$

$Y = a(1 - \sin\theta)$।

এই সমীকৰণত

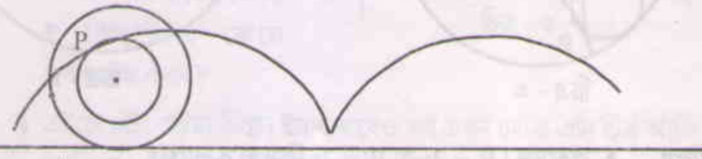
a = বৃত্তটোৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ

আৰু <OPL = θ।



নীলাক্ষি ঃ বাইদেউ এনে চাইক্লইডৰ ম'ডেল কিছুমান আমি গণিত প্ৰদৰ্শনীৰ বাবে বনাব খোজো। আৰু অইন ইয়াৰ কেনে বিভিন্ন ম'ডেল বনাব পাৰি ক'ব নেকি?

বাইদেউ ঃ এয়া চোৱা, মই চাৰ্ট এখনত কিছুমান কথা দেখুৱাইছো। 1নং চিত্ৰটোত এটা চকা বা এখন খালী চিডি কেছেটৰ ভিতৰত P এটা ফুটা। এই কেছেটটোক আগৰ বৃত্তৰ দৰে এটা সৰলৰেখাত একে সমতলত ঘূৰাই নিলে ফুটাটোত থকা পেঞ্চিল এডালে এটা চাইক্লইড বনাব, যিটোৰ শীৰ্ষবিন্দুবোৰে ভূমি ৰেখাটো ঢুকি নাপায়, ওপৰত থাকিব। আনহাতে যদি এনে এটা ম'ডেল সজোৱা যাতে P বিন্দুটো কেছেট বৃত্তটোৰ বাহিৰত নিৰ্দিষ্ট হৈ থাকে।



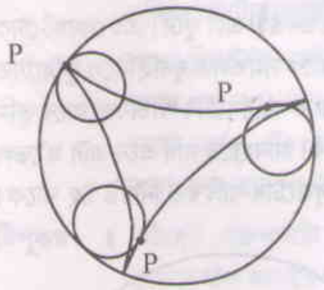
চিত্ৰ - ১

তেন্তে P বিন্দুৰ সঞ্চাৰ পথটোও এটা চাইক্লইড হ'ব যাৰ শীৰ্ষবিন্দু ভূমিৰেখাৰ তলত থাকে। (চিত্ৰ - ২)

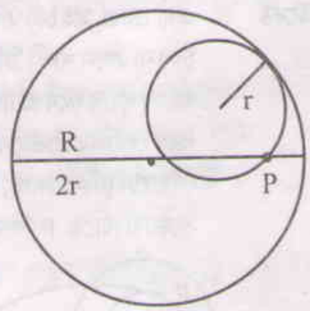
চিত্ৰ - ২

নিপুকণ ঃ বাইদেউ, আমি যদি বৃত্তটোক সৰলৰেখাত নুঘূৰাই অইন ঘূৰণীয়া ৰেখাত ঘূৰাও, তেন্তে কেনে হ'ব?

বাইদেউ ঃ মই অৱশ্যে অইন দুটা চিত্ৰ আঁকি আনিছো। চিত্ৰ-3ত এটা সৰু বৃত্তই অইন এটা ডাঙৰ বৃত্তৰ ভিতৰত একে সমতলত ঘূৰিছে। ইয়াত মই দুটা কথা দেখুৱাইছো। ধৰা ডাঙৰ বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ R আৰু সৰু বৃত্তটোৰ ব্যাসাৰ্দ্ধ r। প্ৰথম চিত্ৰটোত $R = 3r$ আৰু দ্বিতীয় চিত্ৰত $R = 2R$। প্ৰথম চিত্ৰটোৱে সৰু বৃত্তটোৰ পৰিধিত লোৱা P বিন্দুটোৱে এটা বক্ৰৰ সৃষ্টি কৰিছে। ইয়াক গণিতত hypocycloid বোলে। ইয়াত শীৰ্ষবিন্দু তিনিটা। আনহাতে দ্বিতীয় চিত্ৰটোৰ আকৰ্ষণীয় কথা এয়ে হ'ল যে ইয়াত P বিন্দুটোৱে কৰা সঞ্চাৰ পথটো এটা বেঁকাৰেখা নহৈ চিধা ৰেখাহে হ'ব, যিটো ডাঙৰ বৃত্তটোৰ ব্যাস। সঁচাকৈয়ে মনোগ্ৰাহী নহয়নে?



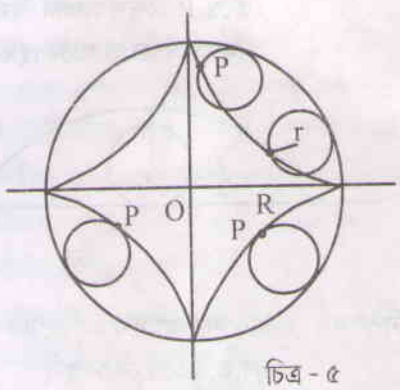
চিত্ৰ - ৩



চিত্ৰ - ৪

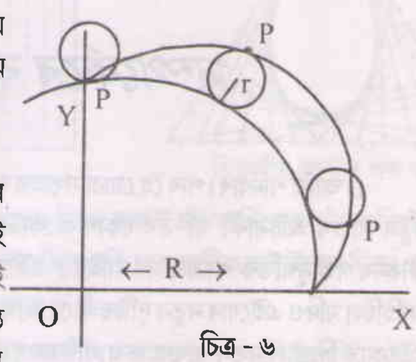
নীলিমা ঃ বাইদেউ! $R = 3r$ বা $R = 2r$ কিয় ল'ব লাগে?

বাইদেউ ঃ ডাঙৰ বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্দ্ধটো সৰু বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্দ্ধৰ গুণিতক যেনে $R = kr$ হ'লেহে আমি এটা মিলি যোৱা সঞ্চাৰপথ পাম ; যেনে প্ৰথম চিত্ৰত তিনিটা শাখাই বৃত্তটোক পূৰা কৰিছে। সেই rটো R অতকৈ k গুণ কম কৰিলেহে k সংখ্যক শাখা অৰ্থাৎ k সংখ্যক শীৰ্ষবিন্দুৰে ডাঙৰ বৃত্তৰ পৰিধিটো সমানে ভাগ হ'ব। চিত্ৰ - ৫।



চিত্ৰ - ৫

আকৌ যদি R = 4r আৰু সৰু বৃত্তটোক ডাঙৰটোৰ পৰিধিৰ ভিতৰফালে চুই থকাকৈ ঘূৰিব দিয়া হয় তেন্তে P বিন্দুটোৱে সঞ্চাৰ কৰা পথটো তলৰ চিত্ৰ-5ত দিয়াৰ দৰে হ'ব। এই আটাইবোৰ বক্ৰৰ নাম হাইপোচাইক্লইড (hypocycloid)। ইয়াতো বক্ৰটোৰ খণ্ডৰ সংখ্যাটো ওপৰৰটোৰ দৰে একে। কিন্তু যদি ইয়াৰ চিত্ৰটোত দেখুৱাৰ দৰে মাত্ৰ চাৰিটা খণ্ডহে থকে, তেন্তে এই হাইপোচাইক্লইডটোৰ নাম এষ্ট্ৰইড (astroid)। এইক্ষেত্ৰত R = 4r। ই এটা প্ৰতিসম ৰেখা। ইয়াৰ কাৰ্টেজীয় সমীকৰণীয় নাম $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$।



চিত্ৰ - ৬

নিপুকণ ঃ সৰু বৃত্তটো যদি ডাঙৰ বৃত্তটোৰ ভিতৰত নুঘূৰাই বাহিৰ পিনে পৰিধিত লগাই লগাই ঘূৰাই থাকো, তেন্তে P বিন্দুটোৱে কেনে সঞ্চাৰপথ বনাব?

বাইদেউ ঃ এইটো এটা বঢ়িয়া চিন্তা। ইয়াৰ বাবেও মই এখন চাৰ্টত এটা চিত্ৰ আঁকি আনিছো। এয়া চোৱা, চিত্ৰত সৰু বৃত্ত এটাই O কেন্দ্ৰীয় ডাঙৰ বৃত্তটোৰ পৰিধিৰ ওপৰত বাহিৰ পিনে চুই ঘূৰি গৈ আছে। সৰু বৃত্তটোৰ পৰিধিৰ ওপৰত থকা নিৰ্দিষ্ট P বিন্দুটোৱে যিটো পথ সঞ্চাৰ কৰিব তাৰ নাম 'এপিচাইক্লইড' (epicycloid)।

যদি সৰু বৃত্তৰ ব্যাস = r, ডাঙৰ বৃত্তৰ ব্যাস = R, তেন্তে বক্ৰটোৰ মাত্ৰ এটা খণ্ড (arc) থাকিব যদি r = R, দুটা খণ্ড থাকিব যদি R = 2r, n টা খণ্ড থাকিব যদি R = nr।

এইবোৰৰ কিছুমান চেষ্টা কৰি তোমালোকে ঘৰতে চিত্ৰ আঁকি চাবা।

তেন্তে আমাৰ আজিলৈ ইয়াতে সামৰণি মাৰিলো।

আটাইকে গুড বাই।

আটায়ে ঃ নমস্কাৰ বাইদেউ। গুড বাই!!

* * * * * * *

নৱম দিন

সম্পৰ্কেৰে বনাও চিত্ৰ

।। আজি শনিবাৰ। পাৰ হৈ যোৱা সপ্তাহৰ আঠোটা দিনতেই ছাত্ৰ-ছাত্ৰীহঁতে প্ৰতিদিনেই নতুন সাজৰ অচিনাকী গণিতৰ কোণ একোটাৰ লগত পৰিচিত হৈ আহিছে। স্কুলীয়া জীৱনৰ গতানুগতিক পাঠ্যক্ৰমৰ বাহিৰত এইবোৰৰ কিছু কিছু গণিত সিহঁতৰ সান্নিধ্যত আহিছিল যদিও এইবোৰ নতুন দৃষ্টিভঙ্গীৰে আগবঢ়োৱা কিছুমান ভাল লগা কোঁহ। হয়তো এইবোৰে পিছলৈ নতুন ধাৰণা ভৰা গণিতৰ দুৰ্বোধ্য অৰণ্যলৈ নাইবা ৰম্য জগতলৈ লৈ যোৱাত প্ৰেৰণা যোগাব। তাৰ উপৰি সম্পূৰ্ণ নতুন কথাবোৰে, ন-সোৱাদেৰে, ন-চিনাকীৰে, ন-সপোনৰ আহিলা আগবঢ়াব। এই আশাৰেই কণ কণহঁতে ন-উদ্যোগেৰে শিকনিৰ মেলাত প্ৰাণমন দিছে।

আজি আকৌ প্ৰণৱজ্যোতি শৰ্মা নামৰ ছাৰ এজনে হাতত কিছুমান চাৰ্ট পেপাৰ মেৰাই লৈ শ্ৰেণী কোঠালৈ সোমাই আহিল। ছাত্ৰ-ছাত্ৰীহঁতক সম্বোধিলে—।।

প্ৰণৱজ্যোতি ছাৰ ঃ কেনে চলিছে তোমালোকৰ গণিত কেম্প?

আটায়ে ঃ ভাল, ভাল লাগিছে ছাৰ।

ছাৰ ঃ এতিয়া তোমালোকৰ চাগে অন্তিম চিন ওচৰ চাপিছে। তোমালোকে কোৱা, তোমালোকক মই নতুন কথা কম নে, তোমালোকৰ স্কুলৰ শ্ৰেণীত টান বা নুবুজা কথাহে কম।

নীলিমা ঃ ছাৰ, দুয়োবিধৰে কওঁক।

ছাৰ ঃ তেন্তে আগতে শ্ৰেণীত স্পষ্টভাবে বুজিবলৈ দিগদাৰী কিছুমানৰ কথাকেই পাতো। কি কম কোৱা?

নিপুকণ ঃ ছাৰ, সংহতিৰ সংজ্ঞা নাই। গতিকে কোনবোৰ সংগ্ৰহ সংহতি, কোনবোৰ নহয় কেনেকৈ গম পাম?

ছাৰ ঃ সংহতি কাক বোলে তাৰহে সংজ্ঞা নাই; কিন্তু তোমাক দিয়া বা তোমালোকক উলিয়াব দিয়া সংহতিবোৰৰ সংজ্ঞা থাকিব। যেনে—

1. $\{2, 3, 4, 6, 8\}$

2. $\{5\}$ বা $\{0\}$ নাইবা $\{x|x \in N, x \leq 10\}$ আদি যিবোৰ স্পষ্ট মৌলৰ সংহতি। একেদৰে {ৰাম, ব্ৰহ্মপুত্ৰ, কটাৰী, আব্ৰাহাম লিংকন}য়ো এটা সংহতি।

নীলাক্ষি ঃ এ, এ ছাৰ! এইটো কিদৰে সংহতি?

ছাৰ ঃ তোমালোকে এইখিনিতে ভুল কৰা। সংহতি এটা গঠন কৰোতে তাৰ মৌলবোৰৰ মাজত দেখদেখ সম্পৰ্ক এটা থাকিব লাগে বুলি কোনো কথা নাই। কোনোৱে এটা সংগ্ৰহক সংহতি বুলি কৈ দিলেই, তোমালোক ধৰি লবা যে সেইটো এটা 'ৰেডিমেড' সংহতি, যিদৰে বজাৰৰ পৰা কিনি অনা বস্তুবোৰক আমি বস্তু বুলি গ্ৰহণ কৰো আৰু যিদৰে তোমালোকৰ কিতাপত অনুশীলনীত দিয়া সংহতি বোলা সংগ্ৰহবোৰক সংহতি বুলি গ্ৰহণ কৰা। কিন্তু এইখিনিতে...

প্ৰবাল ঃ ছাৰ; তেন্তে সংগ্ৰহ কোনবোৰ সংহতি নহয়?

ছাৰ ঃ ৰ'বা, মোক ক'ব দিয়া। তুমি যদি সংহতি এটা সংজ্ঞা দি লৈছা আৰু যদি সেই সংজ্ঞামতে সংহতিটোৰ মৌলবোৰ স্পষ্টভাবে পাব নোৱাৰি, অৰ্থাৎ মৌলবোৰ সুসংজ্ঞিত নহয় তেন্তে সংগ্ৰহবোৰ সংহতি নহয়।

প্ৰবাল ঃ ছাৰ এটা উদাহৰণ দিব নেকি?

ছাৰ ঃ হয়। যেনে তুমি এটা সংহতিৰ কথা ভাবিছা, যেনে পৃথিৱীৰ বগা মানুহবোৰৰ সংহতি। তেন্তে কিছুমান মানুহ আছে যাক বগা নহয় বুলি ক'ব নোৱাৰি, কিন্তু তেওঁক বগা বুলিও ক'ব নোৱাৰি। তেনেদৰে গুৱাহাটীৰ জুতাৰ দোকানবোৰত থকা বাওঁ ভৰিৰ মোজাবোৰৰ সংহতি। এই সংহতিবোৰত মৌলবোৰ নিৰ্দিষ্টভাবে বাচিব নোৱাৰি।

নীলিমা ঃ কিন্তু ছাৰ, আপোনাৰ ওপৰৰ চতুৰ্থ উদাহৰণটোত কোনোবাই যদি কিবা সংজ্ঞা দি গঠন কৰিছেও তেওঁৰ সংজ্ঞাটোৰে ভুল যেন লাগিছে।

ছাৰ ঃ বঢ়িয়া প্ৰশ্ন। তুমি 'ৰেডিমেড' সংহতিটোক 'ভেজাল' বুলি সন্দেহ কৰিছা। সন্দেহ থকাটো ভাল। সংহতিৰ দ্বিতীয় বন্ধনীৰ মাজত মৌল কেইটামান লিখি দিয়াটোৱে সংজ্ঞা অৰ্থাৎ সেই সংহতিটো সেইকেইটা মৌলৰ সংহতি। তাৰোপৰি ওপৰৰ চতুৰ্থ সংগ্ৰহটোত বেলেগ দি লোৱা সংজ্ঞাও থাকিব পাৰে; যেনে যিদৰে x^2-3x+2=0 সমীকৰণটোৰ (মূলবোৰৰ) সমাধান সংহতি {1,2}, তেনেদৰে চতুৰ্থ নংটো তলৰ প্ৰশ্নটোৰ সমাধান সংহতি হ'ব পাৰে, যেনে ঃ

প্ৰশ্ন ঃ খালী ঠাইত কি হ'ব?

ৰামায়ণত সীতাৰ স্বামী ...., অসমৰ মাজেৰে বৈ যোৱা সৰ্ববৃহৎ নদী ...., এবিধ সৰু কটা সঁজুলি............, আমেৰিকাৰ এজন ভূতপূৰ্ব প্ৰেছিডেন্ট ....।

গতিকে এই প্ৰশ্নৰ সমাধান সংহতিটো জানো চতুৰ্থ নংটো নহয়।

আটায়ে ঃ ও হ'ব ছাৰ।

ছাৰ ঃ যিয়েই নহওঁক, মুঠতে মৌলবোৰ স্পষ্ট হ'লে অৰ্থাৎ সংহতি এটাত কোনবোৰ মৌল আছে বা নাই এই কথাটো স্পষ্টকৈ থাকিলেই যিকোনো সংগ্ৰহ এটাই সংহতি। কোনো মৌল নথকা সংগ্ৰহ এটাকো সংহতি বুলি ধৰা হয়, যিদৰে আমি 0 কো এটা সংখ্যা বুলি ধৰো।' গতিকে $\phi = \{\}$ এটা সংহতি। এইবোৰ তোমালোকে জানাই।

নিপুকণ ঃ ছাৰ, আমি জানো যে ϕ প্ৰতি সংহতিৰে উপসংহতি ; কিন্তু এই সংহতিটো প্ৰকৃত নে অপকৃত? অৱশ্যে প্ৰকৃত নোহোৱাবোৰেই অপ্ৰকৃত।

ছাৰ ঃ তোমালোকে প্ৰকৃত উপসংহতি কাক বোলে বুলি পাইছা?

নিপুকণ ঃ ছাৰ; যদি A,Bৰ উপসংহতি আৰু $A \neq B$, তেন্তে A, Bৰ প্ৰকৃত উপসংহতি। তাৰোপৰি A,Aৰ অপ্ৰকৃত উপসংহতি।

নীলাক্ষী ঃ ছাৰ, আমাৰ কিতাপত আকৌ প্ৰকৃত উপসংহতিৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে,

যদি A, Bৰ উপসংহতি আৰু $A \neq B$ আৰু $A,B \neq \phi$ তেন্তে A,Bৰ প্ৰকৃত উপসংহতি।

ছাৰ : তেন্তে তোমাৰ সংজ্ঞা মতে যদি $A=\phi$ তেন্তে ϕ অপ্ৰকৃত অৰ্থাৎ improper। মনত ৰাখিবা, ϕ প্ৰকৃত বা অপ্ৰকৃত নিৰ্ভৰ কৰে সংজ্ঞাৰ ওপৰত। কিতাপৰ লেখকে যি ধৰণে সংজ্ঞা দিয়ে সেইমতে হয়। গোটেই পৃথিৱীতে প্ৰকৃত বা অপ্ৰকৃতৰ কোনো নিৰ্দিষ্ট সংজ্ঞা ধৰাবন্ধাকৈ দিয়া হোৱা নাই। ইয়াৰ কাৰণ এয়ে যে পিছলৈ কিছুমান অসুবিধা আছে। সেয়ে ϕৰ ক্ষেত্ৰত সংজ্ঞা নোহোৱাকৈ প্ৰকৃত বা অপ্ৰকৃত বুলি ধাৰ্য কৰাটো নিৰৰ্থক।

নীলিমা : ছাৰ, প্ৰত্যেক সংহতিৰে প্ৰকৃত উপসংহতি আছেনে?

ছাৰ : প্ৰত্যেক সংহতিৰে প্ৰকৃত উপসংহতি আছেনে নাই নিপুকণে ক'ব।

নিপুকণ : ছাৰ, মোৰ সংজ্ঞামতে ϕৰ বাহিৰে সকলোৰে আছে; কিন্তু নীলাক্ষি কোৱা সংজ্ঞামতে একক সংহতিৰ প্ৰকৃত উপসংহতি নাই।

ছাৰ : বঢ়িয়া উত্তৰ। বাৰু সমান সংহতি কাক বোলে?

অংকিত : ছাৰ $A = B$, যদি প্ৰত্যেক $x \in A$ৰ ক্ষেত্ৰতেই $x \in B$ আৰু প্ৰত্যেক $y \in B$ৰ ক্ষেত্ৰতেই $y \in A$, অৰ্থাৎ $A \subseteq B$ আৰু লগতে $B \subseteq A$।

ছাৰ : শুদ্ধ হৈছে। গতিকে কোৱা কোনবোৰ শুদ্ধ?

(ছাৰে বোৰ্ডত লিখে)

(i) $\{a, b, c\} = \{a, a, a, b, b, c\} = \{c, b, a\}$

(ii) $\{P\} = P$ (iii) {1, 2, 3} = {১, ২, ৩}

(iv) $\{A, S, S, A, M\} = \{ASSAM\} = \{A,S,M\}$

(v) $\{I, N, A, U, G, U, R, A, T, O, R\} = \{T,A,R,U,N, G,O,G,O,I\}$

নীলিমা : ছাৰ, মোৰ মতে (i) আৰু (v) হে শুদ্ধ।

ছাৰ : (ii) আৰু (iv) কিয় ভুল?

নীলিমা : ছাৰ (ii)ৰ বাওপক্ষ {P} এটা সংহতি যাৰ মৌল P, আনহাতে সোঁপক্ষৰ P সংহতি নহয়। আকৌ (iv)ৰ মাজৰ সংহতিটোত মাত্ৰ এটাহে মৌল আছে'ASSAM' যিটো মৌল হিচাপে বাওপক্ষৰ সংহতিটোত নাই। অৱশ্যে ইয়াৰ দুয়োমূৰৰ সংহতি দুটা সমান, কাৰণ মৌলবোৰ একে।

ছাৰ : হৈছে। কিশোৰ কোৱা, (iii)নংটো শুদ্ধ নে ভুল।

কিশোৰ ঃ শুদ্ধ।

ছাৰ ঃ নীলাক্ষি! শুদ্ধ হয়নে?

নীলাক্ষি ঃ ছাৰ $\{1,2,3\}$ = {১,২,৩} শুদ্ধ হ'বও পাৰে, নহ'বও পাৰে। শুদ্ধ হ'ব যদি ইইঁতে সংখ্যাহে বুজাইছে। ভুল হ'ব যদি ইইঁতে প্ৰতীকৰ সংহতি।

ছাৰ ঃ অতি সুন্দৰ শুদ্ধ উত্তৰ। এইবাৰ কোৱা কোনবোৰ শুদ্ধ?

a) $A \bigcup B = \{x / x \in A, x \in B\}$

b) $A \bigcap B = \{x / x \in A, x \in B\}$

c) $A\text{-}B = \{x / x \in A, x \notin B\}$

নীলাক্ষি ঃ ছাৰ, ইয়াত অকল (b)হে শুদ্ধ। আমি মন কৰিব লাগে যে বিবৃতিৰ মাজত থকা ক'মাবোৰে 'আৰু' 'কিন্তু', 'আৰু লগতে'— এইবোৰহে বুজায়। (a)ত থকা $A \bigcup B$ত x মৌলবোৰ হয় Aত, নহয় Bত নাইবা A আৰু B দুয়োটাতে থকাটোহে বুজায়। গতিকে ইয়াত ক'মাৰ ঠাইত 'বা', 'নাইবা'হে বহিব। (c)ত A-Bৰ বাবে x য়ে Aত থাকিব আৰু লগতে Bত নাথাকে। গতিকে ইয়াত 'বা'ৰ ঠাইত কমাহে বহিব।

ছাৰ ঃ অতি সুন্দৰ! নীলাক্ষিৰ উত্তৰবোৰৰ পৰা বুজা যায় যে তেওঁ যিয়ে পঢ়ে খুতিনাতি মাৰি পঢ়ে। সংহতি অধ্যয়ন কৰাৰ আগতে গণিতীয় যুক্তিৰ বিষয়ে ভালদৰে জানি লোৱা ভাল। তাৰোপৰি সংহতিৰ বীজীয় ধৰ্মৰ লগতে বিবৃতিবোৰৰো বীজীয় ধৰ্ম জানিব লাগে। উদাহৰণ স্বৰূপে, ধৰা আমি দেখুৱাব লাগে $A \bigcap (B \bigcup C)$ আৰু $(A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$ সংহতি দুটা সমান; অৰ্থাৎ প্ৰতি

$x \in A \bigcap (B \bigcup C)$

$\Leftrightarrow x \in A$ আৰু $x \in (B \bigcup C)$

$\Leftrightarrow x \in A$ আৰু ($x \in B$ বা $x \in C$)

$\Leftrightarrow$ ($x \in A$ আৰু $x \in B$) বা ($x \in A$ আৰু $x \in C$)

বিবৃত্তিৰ বিতৰণ পদ্ধতিৰ এই ক্ষেপটো মন কৰা; ইয়াৰ পিছত,

$\Leftrightarrow (x \in A \bigcap B)$ বা $(x \in A \bigcap C)$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

বাকী দুয়োটা সংহতি সমান হোৱাৰ যুক্তিটো সহজ।

প্ৰবাল ঃ ছাৰ, ইয়াত আমি $\Leftrightarrow$ ৰ পৰিৱৰ্তে = এই সমান চিনটো ব্যৱহাৰ কৰিব নোৱাৰো নেকি?

ছাৰ ঃ দুটা ৰাশি যদি সমান তেতিয়াহে আমি সমান চিনটো ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰো। কিন্তু দুটা বিবৃতি সমতুল্যহে হ'ব পাৰে, সমান হ'ব নোৱাৰে; সেয়ে আমি ইয়াত সমতুল্যৰ চিন $\Leftrightarrow$ অৰ্থাৎ 'যদি আৰু যদিহে'ৰ প্ৰতীক ব্যৱহাৰ কৰিছো।

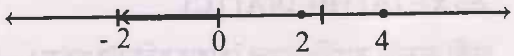
অংকিতা ঃ ছাৰ সাৰ্বিক সংহতি (universal set) কাক বোলে? আমি ইয়াৰ ছোৱালীকেইজনীৰ উপসংহতিটোৰ সাৰ্বিক সংহতি আমাৰ শ্ৰেণীটো হ'ব নে গোটেই স্কুলখন হয়, নে গোটেই সুন্দৰীদিয়া অঞ্চলৰ মানুহবোৰ হ'ব?

ছাৰ ঃ এইটো এটা বঢ়িয়া প্ৰশ্ন। সাৰ্বিক সংহতিক আমাৰ প্ৰয়োজন হয় কেতিয়া, যেতিয়া আমি এটাতকৈ বেছি উপসংহতি বা সংহতিৰ মাজত বীজীয় প্ৰক্ৰিয়া নাইবা সম্পৰ্কৰ কথা আলোচনা কৰিবলগীয়া হয়। ধৰা A, B, C তিনিটা সংহতি, তেন্তে এই তিনিওটা সংহতিক আমি যিটো অতিসংহতিৰ ভিতৰত উপসংহতি চিহাপে থকা বুলি গণ্য কৰো, অৰ্থাৎ নিৰ্দিষ্ট ভাবে ধৰি লও, তেতিয়া সেই উমৈহতীয়া অতি সংহতিটোকে সাৰ্বিক সংহতি বোলে। আমাৰ সাধাৰণতে এই সাৰ্বিক সংহতিটো বেছিভাগ ক্ষেত্ৰতে উল্লেখ নাথাকে, তেতিয়া আমি অসুবিধা নহ'লে সাধাৰণ অতিসংহতিকে সাৰ্বিক বুলি গণ্য কৰো। উদাহৰণ স্বৰূপে, ধৰা আমাক $(0, 6)^C$ বা $(-2,0) \cup \{O\} \cup \{2,4,\}$ সংহতিটো উলিয়াব লাগে। ইয়াত বেলেগে উল্লেখ নাথাকিলে আমি প্ৰতিটো অন্তৰাল সংহতিকে বাস্তৱ সংখ্যা Rৰ উপসংহতি হিচাপে ধৰিব পাৰো, কাৰণ তেতিয়াহে—

$(0, 6)^C = R-(0, 6) = (-\infty, 0) \cup (6, \infty)$ হ'ব,

আৰু একেদৰে—

$(-2, 0) \cup \{0\} \cup \{7, 8, 9\} = (-2, 0] \cup \{2, 4\}$



অৰ্থাৎ চিত্ৰত ডাঠ ৰঙেৰে দেখুৱা মৌলবোৰৰ সংহতিটো হ'ব, যিটো সাৰ্বিক সংহতি Rৰ উপসংহতি।

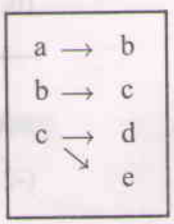
নিপুকণ ঃ ছাৰ, আপুনি অলপ আগতে উল্লেখ কৰিছিল, সংহতিৰ মাজত সম্পৰ্কৰ কথা— এইটো কি বস্তু, আমি পোৱা নাই।

ছাৰ ঃ এটা সময়ত আছিল— সংখ্যাই জগতৰ সৰ্বস্ব। গণনা আৰু জোখ-মাপৰ ক্ষেত্ৰত সংখ্যাই মৌলিক আধাৰ— এই কথাটো এতিয়াও বৰ্তি আছে। কিন্তু বৰ্তমান যুগত আটাইবোৰ গাণিতিক প্ৰয়োজনীয়তা, যুক্তি আৰু বৈজ্ঞানিক বিকাশত অকল সংখ্যাৰ বাহিৰেও বিভিন্ন গাণিতিক আৰ্হিৰ প্ৰয়োজন হ'ল। উদাহৰণ স্বৰূপে 'অসীম' কি আৰু ইয়াৰ ব্যৱহাৰৰ ফলত উদ্ভৱ হোৱা বিভ্ৰমবোৰে মানুহক কেবা শতিকা জুৰি বিভ্ৰান্ত কৰি ৰাখিছিল। এনেতে উনৈশ শতিকাত জাৰ্মান গণিতজ্ঞ জৰ্জ কেণ্টৰে (1845-1918) অসীম বস্তুৰ সংগ্ৰহ এটাক গণিতৰ আয়ত্বলৈ অনাৰ বাবে কৌশল বিচাৰি তেওঁৱেঁই প্ৰথমে সংহতিৰ ধাৰণা কৰে। এই সংহতিৰ প্ৰয়োগৰ ধাৰণাই ইমানেই সুফল লাভ কৰিলে যে আধুনিক জগতত ইয়াৰ তত্ত্বই গোটেই গণিতৰ জগতখন ছানি পেলালে। এতিয়া গণিতৰ সূচকীয় হাৰত ইয়াৰ আৰ্হি আৰু আকাৰ বৃদ্ধি পোৱাৰ মূল কাৰণ হ'ল সংহতি আৰু সংহতিৰ মাজৰ সম্পৰ্কবোৰে সৃষ্টি কৰা নতুন নতুন গাণিতিক আৰ্হি। হ'লেও এই আটাইবোৰ সৃষ্টিয়েই আমি মানুহৰে সৃষ্টি। অইন এজন জাৰ্মান গণিতজ্ঞ লিওপ'ল্‌দ ক্ৰোনিকাৰৰ (১৮২৩-১৮৯১) ভাষাত—

"The whole numbers has the Dear God made. All else is man's work."

নীলিমা ঃ ছাৰ, সংহতিত আকৌ কেনে, সম্পৰ্কবোৰ!

ছাৰ ঃ সংহতিত সম্পৰ্ক হ'ল এটা সংহতিৰ ভিতৰৰ নাইবা দুটা সংহতিৰ ভিতৰৰ দুটা দুটা মৌলক একে যুৰীয়া কৰা। যেনে ধৰা Aএটা সংহতি। ধৰা ইয়াৰ মৌল a ক্ bৰ লগত, bক cৰ লগত cক d আৰু লগতে eৰ লগত, ইত্যাদি ধৰণে লগ লগোৱা হ'ল। যদি



এই সম্পৰ্কটোক আমি R বুলি কও, তেন্তে চমুকৈ আমি লিখিব পাৰো aRb, bRc, cRd, cRe ইত্যাদিকৈ।

(a,b) ∈R, নাইবা $a \xrightarrow{R} b$; অৰ্থাৎ a ই R সম্পৰ্কেৰে bৰ লগত সম্পৰ্কিত। যদি এনে এটাইবোৰ সম্পৰ্কিত যোৰবোৰ লও, তেন্তে আমি লিখো—

সম্পৰ্ক R={(a, b), (b, c), (c, d), (c, e), ...}

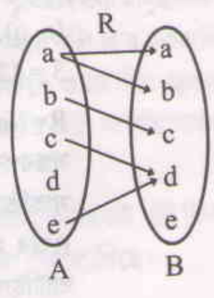
গতিকে R এটা সম্পৰ্ক বুলিলে Rঅক আটাইবোৰ সম্পৰ্কিত ক্ৰমিকযোৰৰ সংহতিটো বুজোৱা হয়।

R সংহতিটো জানিলে কোনবোৰ মৌল কাৰ লগত সম্পৰ্কেৰে জড়িত বুজিব পাৰি। বুজিলানে?

ময়ুৰ : বুজা নাই ছাৰ। a,bৰ লগত কৰা সম্পৰ্কটো কি? R টো আমি কেনেদৰে লম?

ছাৰ : সুন্দৰ প্ৰশ্ন! সাধাৰণতে আমি সম্পৰ্ক বোলোতে ভাই, মোমাই, দেউতা আদিকে সম্পৰ্ক বুলি ভাবো। কিন্তু গণিতত এইবোৰকতো সম্পৰ্ক হিচাবে লমেই তাৰ উপৰি সংহতিৰ মৌলবোৰক সংজ্ঞা দি লোৱাৰ দৰে ইয়াতো আমি Rৰ যুৰীয়া মৌলবোৰ বৰ্ণাই দিলেই এটা সম্পৰ্ক হোৱা বুলি কম; যেনে ওপৰৰ (a,b), (b,c), (c,d) ইত্যাদি, এটা সম্পৰ্ক R। গণিতত কোণ মৌল কোনটো মৌলৰ লগত জড়িত সেইটোহে দৰ্কাৰী, কিদৰে বা কি নিয়মৰ অধীনত জড়িত সেইটোৰ প্ৰয়োজন নাই। যদি aRb, তেন্তে aৰ পৰা b লৈ এডাল কাড় '→' দিলেই যথেষ্ট। এই কাড়ডালেই সম্পৰ্কটো নিৰ্দ্ধাৰণ কৰিব। মন কৰা যে aRb হ'লে bRa নহবও পাৰে; অৰ্থাৎ (a,b) ∈R য়ে নুবুজায় যে (b,a) ∈R.

নিপুকণ : ছাৰ, আৰু এটা কথা। এটা সংহতিত থকা আটাইবোৰ মৌলৰেই কাৰোবাৰ লগত সম্পৰ্ক থাকিব লাগে নেকি?

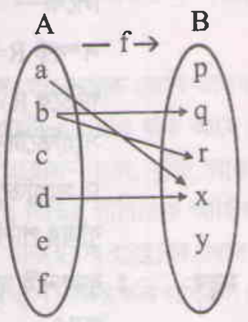


ছাৰ : প্ৰয়োজন নাই। তাৰোপৰি একেটা মৌলৰেই বহুত মৌলৰ লগ্‌তো সম্পৰ্কিত হ'ব পাৰে, যেনে, চিত্ৰত চোৱা (আঁকি দিয়ে)।

R= {(a, a), (a, b), (b, c), (c, d), (e, d)}

ইয়াত সম্পৰ্কটো Aৰ পৰা Bলৈ।

Aক আদিক্ষেত্ৰ (domain) আৰু Bক সহক্ষেত্ৰ (co-domain) বোলে। সম্পৰ্ক কৰিবলগীয়া মৌলবোৰ Aৰ পিনে আৰু সম্পৰ্কিত মৌলবোৰ Bৰ পিনে থাকিব। Aৰ মৌলবোৰ কৰ্তা (subject) আৰু Bৰ মৌলবোৰ কৰ্ম (object)ৰ ভাওত থকিব।

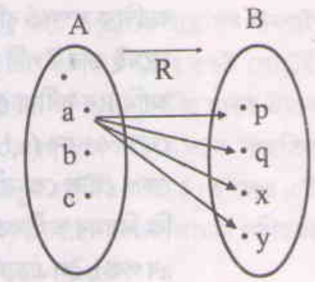


কাষৰ চিত্ৰত দুটা বেলেগ সংহতিৰ মৌলবোৰৰ মাজত সম্পৰ্ক দেখুৱাইছে। কথাটো একেই। ইয়াত f : A ⟶B এটা সম্পৰ্ক যাতে—

f = {(a,x), (b,q), (b,r), (d,x)}

ৰুণুমী : ছাৰ, দুটা সংহতিৰ মাজত কিমান বেলেগ বেলেগ সম্পৰ্ক থাকিব পাৰে?

ছাৰ : ভাল প্ৰশ্নই সুধিছা। Aৰ পৰা এটা আৰু Bৰ পৰা এটাকৈ মৌল লৈ আমি কিমান ধৰণে যোৰ একোটা বাচিব পাৰো তাৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰিব তুমি কিমানটা বেলেগ সম্পৰ্ক গঢ়িব পাৰা। কাষৰ চিত্ৰটো চোৱা— Aত মাত্ৰ 3 টা আৰু Bত মাত্ৰ 4 টা মৌল আছে। গতিকে Aৰ পৰা B লৈ মুঠ কিমানটা বিভিন্ন যোৰ (u, v) বনাব পাৰো, চিত্ৰত চোৱা। অকল aৰ লগত (a, p), (a, q), (a, x), (a, y) এই চাৰিটা। এইদৰে b আৰু cকে ল'লে মুঠ 4 × 3 = 12টা যোৰ হ'ব। গতিকে—



R={(a, p), (a, q), (a, x), (a, y), (b, p), ...} এটা সম্পৰ্ক, যিটোত সম্ভৱপৰ আটাইবোৰ সম্পৰ্কিত যোৰেই আছে। মন কৰা যে এই R সংহতিটোৰ আটাইবোৰ উপসংহতিয়েও একোটা সম্পৰ্ক বুজাব। গতিকে Rঅৰ মুঠ উপসংহতিবোৰৰ পৰিমাণেই Aৰ পৰা Bলৈ হ'ব পৰা আটাইবোৰ সম্পৰ্কৰ সংখ্যা হ'ব।

গতিকে আমাৰ চিত্ৰটোত কিমানটা মুঠ সম্পৰ্ক পাবা চিন্তা কৰা।

নিপুকণ ঃ ছাৰ R সংহতিটোত মুঠ 12 টা মৌল আছে। গতিকে ইয়াৰ ঘাত সংহতিটোত (Power Set) মুঠ 2^{12} টা মৌল থাকিব, অৰ্থাৎ মুঠ সম্পৰ্কৰ পৰিমাণ এটা বৃহৎ সংখ্যা, 2^{12} হ'ব।

ছাৰ ঃ থেংক ইউ। ৰুণুমী বুজিলানে?

ৰুণুমী ঃ বুজিছো ছাৰ। যদি A, B সংহতি দুটা ডাঙৰ হয় তেন্তে এই সম্পৰ্কৰ পৰিমানো ভাবিব নোৱাৰাকৈ ডাঙৰ হ'ব।

ছাৰ ঃ সুন্দৰ! আমি আগতে কৈছো যে সম্পৰ্ক এটা 'কিদৰে', 'কিয়', নাইবা কি সূত্ৰেৰে ব্যাখ্যা কৰা হৈছে তাক বিচাৰ কৰাটো অপ্ৰাসঙ্গিক। কিন্তু সহক্ষেত্ৰত (কৰ্মৰ) মৌলবোৰ নিৰ্দ্ধাৰণ কৰিবলৈ আমি কেতিয়াবা আৰু প্ৰায়েই কোনো নিয়ম বা সমীকৰণ এটাৰ আশ্ৰয় ল'লে সুবিধা হয়। উদাহৰণস্বৰূপে ধৰা f সম্পৰ্কটো সদায় এই নিয়মত আছে, যেনে প্ৰত্যেক বাস্তৱ সংখ্যা x য়ে 2x+3ৰ লগত f সম্পৰ্ক কৰে। চুটিকৈ লিখিলে, f এটা সম্পৰ্ক যাতে—

$$R \xrightarrow{f} R$$
$$x \xrightarrow{f} f(x) = y$$
$$2x+3$$
$$0 \longrightarrow 2.0+3$$
$$1 \longrightarrow 2.1+3$$
$$-2 \longrightarrow 2(-2)+3$$
$$\frac{1}{2} \longrightarrow 2.\frac{1}{2}+3$$
$$\pi \longrightarrow 2\pi+3$$
ইত্যাদি

$f : x \longrightarrow 2x+3$ নাইবা $f(x) = 2x+3$

ইয়াত x আদিক্ষেত্ৰত আৰু f(x) অৰ্থাৎ 2x+3 সহক্ষেত্ৰত থাকিব। f(x)অক আকৌ চুটিকৈ y বুলিও লিখিব পাৰি। এইদৰে বৰ্ণোৱা সম্পৰ্কটোত কোন মৌল কাৰ লগত জড়িত স্পষ্টকৈ বুজা যাব। চিত্ৰটোত চোৱা।

$$\therefore\ f = \{(0, 3), (1, 5), (-2, -1), (\frac{1}{2}, 4), (\pi, 2\pi + 3)........\}$$

f এটা অসীম সংহতি, কাৰণ আদিক্ষেত্ৰ R অসীম।

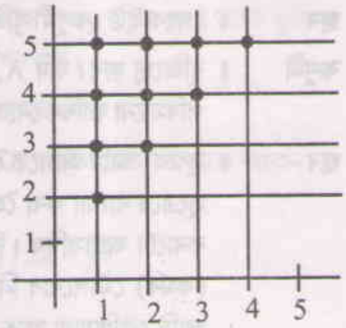
এতিয়া মই এটা উদাহৰণ কৰি দিও। পিছত তোমালোকক ঘৰত কৰিবলৈ দুটামান অনুশীলনী দিম।

আটায়ে ঃ হ'ব ছাৰ।

ছাৰ : ধৰা $S=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ এটা সংহতি; আৰু S সংহতিটোত R এটা সম্পৰ্ক দিলো যাতে aRb হ'ব, যদি $a<b$। তেন্তে এই সম্পৰ্কটোক আমি এইদৰে বিভিন্ন ধৰণে বৰ্ণাব পাৰো—

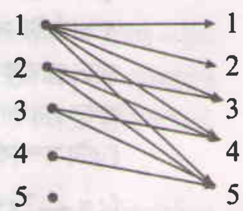
(i) $R=\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$

অৰ্থাৎ ক্ৰমিক যোৰৰ সংহতিৰে। ইয়াত চোৱা $(1,2) \in R$ কাৰণ $1<2$ অৰ্থাৎ 1R2। ইত্যাদি।



(ii) কাষৰ চিত্ৰত দেখুৱা ধৰণে স্থানাংক সমতলত এটা লেখৰ সহায়ত ওপৰৰ Rৰ পৰা বিন্দুবোৰ বহুৱাই। অৰ্থাৎ এই বিন্দুবোৰৰ সংহতিটোৰে R সম্পৰ্কক লেখত দেখুৱাইছে।

(iii) আদিক্ষেত্ৰ আৰু সহক্ষেত্ৰৰ মৌলবোৰ কাড়চিনেৰে সম্পৰ্কিত কৰি—



এই বাৰ আমি এটা বেলেগ সম্পৰ্কলৈ চাওঁ।

ধৰা আগৰ দৰে $S=\{2,3,4,5,6\}$, আৰু Sৰ ওপৰত R এটা সম্পৰ্ক যাতে aRb যদি a আৰু bৰ 1ৰ বাহিৰে অইন এটা সাধাৰণ উৎপাদক আছে, যেনে 4R6, কাৰণ 4 আৰু 6ৰ এটা সাধাৰণ উৎপাদক আছে, যেনে 2।

সম্পৰ্কটো সংহতিৰূপে প্ৰকাশ কৰিব লাগে। কোনে কবা?

প্ৰবাল : ছাৰ, মই কওঁ?

$R=\{(2, 4), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (4, 2), (6, 2), (6, 3), (6, 4)\}$।

ছাৰ : সম্পূৰ্ণ শুদ্ধ। ইয়াত (2, 5) নাথাকে কাৰণ 2, 5ৰ সাধাৰণ উৎপাদক নাই;

সেইদৰে নাথাকে (5, 3) ইত্যাদি।

বাৰু, এতিয়া কোৱা নীলাক্ষি, ইয়াত প্ৰত্যেক $a \in S$ অৰ ক্ষেত্ৰতেই aRa হয়নে?

নীলাক্ষি : হয় ছাৰ, যেনে 6R6। সেইদৰে প্ৰত্যেকটা মৌল নিজৰ লগত সম্পৰ্কিত।

ছাৰ : যদি aRb তেন্তে bRa হ'বনে?

নীলাক্ষি : হ'ব ছাৰ। Rৰ পৰা 2R6 আৰু 6R2 ; ইত্যাদি ধৰণে Rৰ প্ৰতিটো যোৰৰ একোটা বিপৰীত যোৰ আছে।

ছাৰ : হয়। এইবাৰ নীলিমা কোৱা। যদি aRb, bRc তেন্তে সদায়েই aRc হ'বনে?

নীলিমা : নহয় ছাৰ। যেনে 2R6, 6R3, কিন্তু 2R3 নহয়।

ছাৰ : বঢ়িয়া। যদি এটা সংহতি Sঅত R এনে এটা সম্পৰ্ক যাতে

(i) প্ৰত্যেক $a \in S$ ৰ ক্ষেত্ৰতেই aRa

(ii) aRb হ'লে bRa য়ো হয়,

(iii) aRb আৰু bRc যদি হয়, তেন্তে aRc হয়,

তেন্তে এনে সম্পৰ্ক R এটা বৰ ভাল সম্পৰ্ক। এনে সম্পৰ্কবোৰক সমতুল্য (equivalence) সম্পৰ্ক বোলে।

তোমালোকক ঘৰৰ কাম দিলো, এনে সমতুল্য সম্পৰ্ক পাঁচটাৰ উদাহৰণ লৈ প্ৰমাণ কৰি লবা।

এইবাৰ আহা। তোমালোকে বহত দেৰি চাগে গণিতৰ চিন্তা কৰি কৰি আমনি পাইছা। আহা আমি এটি খেল খেলো।

নিপুকণ : আকৌ খেলেই গণিত হ'ব নেকি, ছাৰ?

ছাৰ : নহ'লে উপায়ো নাই; তথাপি খেল খেলেই।

তোমালোকৰ প্ৰত্যেক 1ৰ পৰা 10ৰ ভিতৰত যিকোনো এটা সংখ্যা ভাবা। মোক নক'বা আৰু লিখি লোৱা।

নিয়ন : লিখিলো ছাৰ।

ছাৰ : এতিয়া তাৰ লগত 2 যোগ দিয়া।

— ফলটোক বৰ্গ কৰা।

— তাৰ পৰা তোমাৰ সংখ্যাটোৰ 4 গুণ বাদ দিয়া।

— ফলটোৰ পৰা আকৌ 4 বাদ দিয়া।

— যি পালা তাৰ বৰ্গমূল লোৱা।

— ফলটোক 2ৰে পূৰণ কৰা।

— এতিয়া তাৰ লগত 3 যোগ দিয়া।

— এতিয়া ৰ'বা। কোনে কি ধৰিছিলা মই নোচোৰাকৈয়ে কম।

$$x \xrightarrow{+2} x+2 \xrightarrow{\text{বৰ্গ}} (x+2)^2 \xrightarrow{-4x} (x+2)^2-4x \xrightarrow{-4} (x+2)^2-4x-4$$

$$\xrightarrow{\text{বৰ্গমূল}} \sqrt{(x+2)^2-4x-4} \xrightarrow{\times 2} 2\sqrt{(x+2)^2-4x-4} \xrightarrow{+3} 2\sqrt{(x+2)^2-4x-4}+3$$

অংকিত ঃ ছাৰ কওক, মই কি ধৰিছিলো? মই পাইছো 15।

ছাৰ ঃ তেন্তে তুমি 7 ধৰিছা।

সকলোৱে ঃ (আচৰিত হৈ!) ছাৰ, কেনেকৈ কেনেকৈ ছাৰ?

নীলিমা ঃ ছাৰ, মোৰ কওক, মই কি ধৰিছিলো? মই পাইছো। 19।

ছাৰ ঃ তুমি 9 ধৰিছা।

নীলিমা ঃ ও ছাৰ; মই বুজি পাইছো, আপুনি কেনেকৈ উলিয়ালে! আপুনি আমাক মূৰ্খ বনাব খুজিছিল!

নমিতা, নিপুকণ, কিশোৰ (একেলগে) ঃ আমি বুজিছো ছাৰ। আপুনি এটা ধৰক ছাৰ; আমি কম।

নীলাক্ষি ঃ হয় ছাৰ। আপুনি যে বৰ্গমূল উলিয়াব দিছে তাৰ্লৈকে প্ৰকৃততে সৰল কৰিলে আমি ভবা সংখ্যাটোৱে হয়। তাৰ পিছত আপুনি 2 ৰে পূৰণ কৰি 3 যোগ দিব কৈছে। গতিকে মই যদি 17 পাও আপুনি 3 বিয়োগ দি 2 ৰে হৰণ কৰিলেই পটক্কৈ মোৰ ভবা সংখ্যাটো ওলায়।

ছাৰ ঃ ধন্যবাদ। তোমালোক দেখিছো বেছ বুধিয়ক। অৱশ্যে মই বোৰ্ডত তালিকাখন x ধৰি দেখুৱাই দিয়াত তোমালোকৰ খেলটো বুজিবলৈ বেছি সহজ হ'ল। বাৰু এতিয়া বোৰ্ডলৈ এজন আহা; প্ৰবাল!

(প্ৰবাল আহে)

তুমি বোৰ্ডত ঠিয়কৈ 1 ৰ পৰা 10 লৈ সংখ্যাবোৰ লিখা। (প্ৰবাল লিখে)। এতিয়া কোৱা, তোমালোকে এই সংখ্যাবোৰ ধৰোঁতে কোনে কি পাইছিলা।

নিপুকণ : ছাৰ 1 ধৰাবোৰে পাইছে 3

2 ধৰাবোৰে পাইছে 5

3 ধৰাবোৰে পাইছে 7

4 ধৰাবোৰে পাইছে 9

5 ধৰাবোৰে পাইছে 11

ছাৰ : (মাজতে) বাকীবোৰকো, প্ৰবাল, বোৰ্ডত কোনে কি পাইছা লিখি দিয়া (প্ৰবালে লিখে)।

$x \longrightarrow y = 2x + 1$

$x \longrightarrow 2x+1$

$1 \longrightarrow 3$

$2 \longrightarrow 5$

$3 \longrightarrow 7$

$4 \longrightarrow 9$

$5 \longrightarrow 11$

$6 \longrightarrow 13$

$7 \longrightarrow 15$

$8 \longrightarrow 17$

$9 \longrightarrow 19$

$10 \longrightarrow 21$

এতিয়া কোৱা, বাওঁহাতৰ সংখ্যাবোৰৰ লগত সোঁহাতৰ সখ্যাবোৰৰ সম্পৰ্ক কি?

মেঘালী : ছাৰ, বাওঁহাতৰ প্ৰতিটো সংখ্যাই তাৰ দুগুণতকৈ 1 বেছি হৈছে।

ছাৰ : অৰ্থাৎ আমি বাওঁহাতৰ যিকোনো সংখ্যা এটাকে যদি x বুলি কওঁ, তেন্তে সোঁহাতৰ জড়িত y সংখ্যাটো 2x+1।

অৰ্থাৎ $x \rightarrow 2x+1$ এই সম্পৰ্কটোক আমি আগৰ দৰে যদি f লিখো তেন্তে, $f : x \rightarrow 2x+1$, বা $f(x)=2x+1$।

ইয়াত কোৱাচোন বাৰু, বাওঁহাতৰ প্ৰতিটো সংখ্যাৰ লগতে সোঁহাতে অন্ততঃ এটা সংখ্যা জড়িত আছেনে?

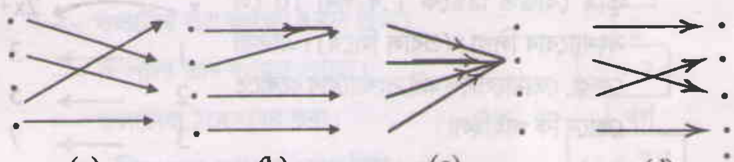
সকলোৱে : আছে ছাৰ।

ছাৰ : কোনো এটা সংখ্যাই সোঁহাতৰ এটাতকৈ বেছি সংখ্যাৰ লগত সম্বন্ধ কৰিছেনে?

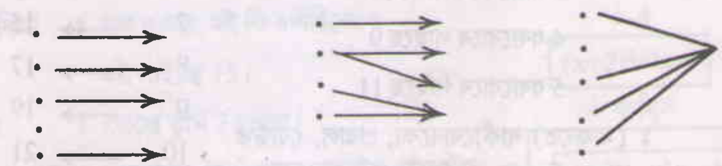
সকলোৱে : নাই কৰা ছাৰ।

ছাৰ : গতিকে এনেবোৰ সম্পৰ্ক ভাল সম্পৰ্ক। ইইঁতক গণিতত ফলন (function) বোলে।

তলৰ সম্পৰ্কবোৰ ফলন, চোৱা আৰু কাৰণ কি চিন্তা কৰা।



তলৰ সম্পৰ্কবোৰ ফলন নহয়, কিয় কোৱা—



ময়ুৰ ঃ ছাৰ (a), (b), (c), (d) বোৰ ফলন, কাৰণ বাওঁহাতৰ প্ৰতিটো মৌল সোঁহাতৰ এটা মৌলৰ লগত আৰু মাত্ৰ এটাৰ লগতহে জড়িত।

ছাৰ ঃ ভাল। তলৰবোৰ কিয় নহয়?

ময়ুৰ ঃ প্ৰথমটো চিত্ৰত এটা মৌল আছে যি কাৰো লগত, জড়িত নহয়। দ্বিতীয়টো চিত্ৰত এনে এটা মৌল আছে, যি এটাতকৈ বেছি মৌলৰ লগত জড়িত। তৃতীয় আৰু প্ৰথমটো একেই।

ছাৰ ঃ এইবোৰ কোৱা, তলৰ কোনটো সম্পৰ্ক ফলন নহয়?

a) {a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 4)}

b) {a, 1), (a, 2), (b, 1), (c, 3)}

c) {2, a), (3, b), (4, b), (5, c)}

d) {x, y), (y, z), (z, x)}

নীলিমা ঃ ছাৰ (b) ফলন নহয় কাৰণ $a \to 1$ আৰু $a \to 2$ অৰ্থাৎ a ই দুটা মৌলৰ লগত সম্পৰ্কিত।

ছাৰ ঃ হৈছে। (d) ফলন হয়নে? চিত্ৰ আঁকি চোৱা।

নীলিমা ঃ (চিত্ৰ আঁকি দিয়ে)

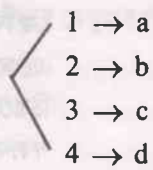
$x \to y$
$y \to z$
$z \to x$

গতিকে হ'ব ছাৰ। ইয়াত বাওপক্ষৰ প্ৰতিটো মৌলে সোঁপক্ষৰ এটা আৰু মাত্ৰ এটাৰ লগতহে সম্পৰ্ক কৰিছে।

ছাৰ ঃ এইবাৰ কোৱা, ধৰা মই ওপৰৰ (a) ফলনটো এনেদৰে লিখিলো— (বোৰ্ডত লিখি)

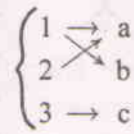
{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)}, অৰ্থাৎ প্ৰতিটো যোৰ মৌলকে ওলোটাই লিখিলো। ই এটা ফলন হ'বনে? নিপুকণ কোৱা।

নিপুকণ ঃ ইয়াত ছাৰ চিত্ৰেৰে দেখুৱালে এনে হ'ব (বোৰ্ডত গৈ আঁকে)। গতিকে সংজ্ঞামতে ইও এটা ফলন হ'ব।

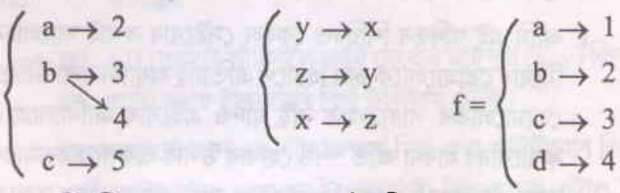


ছাৰ ঃ আমি কম যে আগৰ ফলনটোক যদি আমি f নাম দিও, তেন্তে তোমাৰ ফলনটো f ৰ বিপৰীত। এনেবোৰক f^{-1} বুলি লিখে। ইয়াত চোৱা f^{-1} ৰো প্ৰতিটো মৌল মাত্ৰ এটাহে মৌলৰ লগত জড়িত। তুমি কোৱাচোন ওপৰৰ (b) সম্পৰ্কটোৰ বিপৰীতটো এটা ফলন হ'বনে? (c) বা (d)ৰ হ'বনে?

নিপুকণ ঃ ছাৰ (b)ৰ বিপৰীতটো এনে হ'ব (আঁকি কয়)। গতিকে ই ফলন নহ'ব ছাৰ। কাৰণ a ই দুটাৰ লগত সম্পৰ্ক কৰিছে। তেনেদৰে (c) ও ফলন নহয়। (d)ৰ বিপৰীত থাকিব ছাৰ।



ছাৰ ঃ ভেৰি গুড। (c) আৰু (d)ৰ বিপৰীতৰ চিত্ৰ আঁকিলে এনে হ'ব, চালেই বুজি পাবা, ফলন হয়নে নহয়।

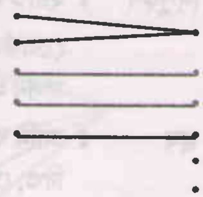


(c)ৰ বিপৰীত (d)ৰ বিপৰীত

ইয়াত (d)ৰ বিপৰীত আৰু f ফলনটো চোৱা। বাওঁপক্ষৰ বেলেগ বেলেগ মৌল সোঁপক্ষৰ বেলেগ বেলেগ মৌলৰ লগত সম্পৰ্ক কৰিছে। এনেবোৰ ফলনৰ আকৌ এটা নাম আছে, এইবোৰৰ নাম একৈকী বা এক-এক (one-to-one) ফলন।

নীলাক্ষি : ছাৰ, এনে এক-এক ফলনৰ আৰু এটা ভাল উদাহৰণ দিব নেকি ?

ছাৰ : তোমালোকৰ প্ৰতি ছাত্ৰই একোযোৰ বেলেগ বেলেগ জোতা পিন্ধিছা। গতিকে ছাত্ৰৰ লগত তোমালোকৰ জোতা এযোৰৰ লগত সম্পৰ্কটো থকা নাই, তাৰোপৰি প্ৰতি ছাত্ৰই এযোৰহে জোতা পিন্ধিছা। গতিকে ছাত্ৰৰ লগত তোমালোকৰ জোতাবোৰৰ সম্পৰ্কটো এক-এক ফলন। কোনো ছাত্ৰই জোতা নিপিন্ধাকৈ থকা নাই, তাৰোপৰি প্ৰতি ছাত্ৰই এযোৰহে জোতা পিন্ধিছে। কোনো দুজন ছাত্ৰই একেযোৰকে জোতা পিন্ধা নাই। যেনে সোঁহাতৰ চিত্ৰটোৰ সম্পৰ্কটো এক-এক নহয়, যদিওবা ই ফলন। ইয়াত চোৱা, সোঁপক্ষৰ দুটা মৌল বাওপক্ষৰ কাৰো লগত সম্পৰ্ক নকৰাকৈ আছে। ফলনত এনে মৌল থাকিব পাৰে। যদি সোঁপক্ষৰ



আটাইবোৰ মৌলই বাওপক্ষৰ অন্ততঃ কাৰোবাৰ লগত জড়িত হৈ থাকে, তেন্তে এনে সম্পৰ্কবোৰক আচ্ছাদক (onto) ফলন বোলে। আমাৰ চিত্ৰটো আচ্ছাদক নহয়। কিছুমান ফলন এক-এক আৰু লগতে আচ্ছাদক। এনে ফলনবোৰ গণিতত বৰ ভাল সম্পৰ্ক। এইবোৰৰ সহায়ত গণিতত সম্পৰ্কৰ অজস্ৰ সমস্যা সমাধান কৰা হয়। আমি আজি এইবোৰৰ মাত্ৰ ধাৰণাহে লৈ থ'লো। তোমালোকে পিছলৈ এইবোৰৰ সম্পৰ্কে দকৈ অধ্যয়ন কৰিব লাগিব।

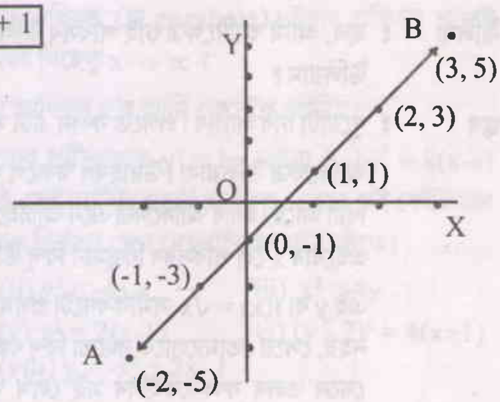
প্ৰবাল : ছাৰ, এইবোৰ তেতিয়া হ'লে আমি এতিয়াই কিয় জানিব লাগে ?

ছাৰ : আমি এই গণিতৰ শিবিৰত কেৱল সেইবোৰ কথাই আলোচনা কৰিছো যিবোৰ তোমালোকে ছাত্ৰ হিচাপে এতিয়াই অধ্যয়ন কৰা উচিত। এইবোৰ তোমালোকৰ পাঠ্যক্ৰমত নাই যদিও এইবোৰ জানিলেহে পাঠ্যক্ৰমৰ কথাবোৰৰ ধাৰণা অতি স্পষ্ট হোৱাৰ উপৰি ধাৰণাবোৰৰ মাজত সম্পৰ্ক আৰু এইবোৰৰ দিশবোৰ নিৰ্ণয় কৰাত সহায় কৰিব। নতুন নতুন জ্ঞানবোৰো তোমালোকৰ পাঠ্যক্ৰমক বহলাই চিনাকি কৰি দিবৰ বাবে গোটোৱা হৈছে। এইবোৰে ভবিষ্যতৰ গাণিতিক ধাৰণাবোৰৰ বুজ দিয়াৰ লগতে তোমালোকক প্ৰতিযোগিতামূলক কাৰ্যক্ৰমত বাৰুকৈয়ে সহায় কৰিব। যেনে ধৰা, আমি আগতে সংহতিৰ মাজত সম্পৰ্কৰ কথা পাতিছো। প্ৰকৃততে এই কথাবোৰ তোমালোকৰ কৰি থকা কামবোৰৰ মাজতে লুকাই আছে।

নমিতা ঃ ছাৰ, এটা উদাহৰণ দিব নেকি ?

ছাৰ ঃ তোমালোকে সমীকৰণ পাইছা ; সমীকৰণৰ সমাধান কৰাৰ উপৰিও তোমালোকে একোটা সমীকৰণক চিত্ৰৰ ৰূপ দিছিলা, তাক তোমালোকে লেখ বা গ্ৰাফ নাম দিছিলা। প্ৰকৃততে একোটা লেখ দুবিধ ৰাশিৰ মাজত থকা এটা সম্পৰ্কৰ চিত্ৰৰ ৰূপহে। সাধাৰণতে এই ৰাশি দুবিধ দুটা সংখ্যাৰ সংহতিহে, যেনে [-2, 3] আৰু (-5, 5) অন্তৰালৰ সংখ্যা সংহতি দুটাৰ মাজত $y = x + 5$ এটা সম্বন্ধ, যাক আমি লেখত এইদৰে দেখুৱাব পাৰো (ছাৰে আঁকি দিয়ে)

x	সম্পৰ্ক →	$y = 2x + 1$
-2		-5
-1.5		-4
-1		-3
0		-1
1		1
2		3
3		5
(আদিক্ষেত্ৰ) Domain		(পৰিক্ষেত্ৰ) Range



নিপুকণ ঃ ছাৰ, AB ৰেখাটো আঁকিবলৈ আমি দেখোন মাত্ৰ দুটা (x, y) বিন্দু বহুৱালেই হয়। আমি সদায় ইমানবোৰ বিন্দু উলিয়াম নেকি ?

ছাৰ ঃ তোমালোকে জানা যে এটা সম্পৰ্ক সিদ্ধ কৰা আটাইবোৰ বিন্দু মিলিহে সেই সম্পৰ্কটোৰ লেখ হয়। সম্পৰ্কটো সিদ্ধ নকৰা এটাও বিন্দু ইয়াৰ ওপৰত থাকিব নোৱাৰে। দ্বিতীয়তে লেখ এটা আঁকোতে অত্যন্ত সাৱধান হ'বলগীয়া কথাটো হ'ল, সম্পৰ্কটোৰ আদিক্ষেত্ৰৰ বাহিৰত যাতে এটাও বিন্দু ন'বহোৱা। আমি অঁকা লেখটো চোৱা, ইয়াৰ ভিতৰত (-2, -5) আৰু (3, 5) মূৰ বিন্দু দুটা নাই, কাৰণ পৰিসৰত -5 আৰু 5 সংখ্যা দুটা নাই যিহেতু পৰিসৰ এটা মুক্ত অন্তৰাল। সেয়ে -2, 3 সংখ্যা দুটাও আদিক্ষেত্ৰত

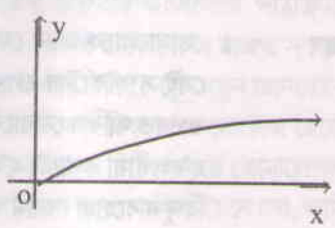
থাকিব নোৱাৰে। সেয়ে A আৰু B বিন্দু দুটাই সংখ্যা সংহতিৰ দুটাৰ মাজত থকা সম্পৰ্ক সিদ্ধ নকৰে; অৰ্থাৎ সম্পৰ্কটো A আৰু B বিন্দু দুটাত ফলন নহয় ; অৱশ্যে ইহঁতৰ বাহিৰে আদিক্ষেত্ৰৰ বাকী [-2, 3] আটাইবোৰ বিন্দুৰ ক্ষেত্ৰতেই পৰিসৰত $y = 2x + 1$ সম্পৰ্কেৰে একোটা আৰু মাত্ৰ একোটাহে বিন্দু পোৱা যাব, গতিকে এই ফলনটোৰ আদিক্ষেত্ৰটো প্ৰকৃততে (-2, 3) হে। কিন্তু হ'লেও আমি সম্পৰ্কৰ (-2, -5) আৰু (3, 5) বিন্দু দুটা বহুৱালেহে AB ৰেখাটো আঁকিব পাৰিম। এইবোৰ কথা নাথাকিলে তুমি যিকোনো দুটা বিন্দু ধৰিয়েই লেখাটো আঁকিব পাৰিবা। প্ৰকৃততে AB মুক্ত ৰেখাটো ইহঁত দুটা বিন্দুৰ মাজত থকা অসীম সংখ্যক অবিচ্ছিন্ন বিন্দুৰ সংহিতহে।

নীলিমা ঃ ছাৰ, আমি আদিক্ষেত্ৰ চাই পৰিসৰ উলিয়াম নে পৰিসৰ চাই আদিক্ষেত্ৰ উলিয়াম?

ছাৰ ঃ দুয়োটা চাব লাগিব। লগতে ফলন এটা সংজ্ঞা দিয়া সম্পৰ্কটো, যাৰ পৰা আদিক্ষেত্ৰ উলিয়াবা। উদাহৰণ স্বৰূপে ধৰা $f : x \to \sqrt{x}$ সম্পৰ্ক এটা দিয়া আছে। ইয়াৰ আদিক্ষেত্ৰ এনে আটাইবোৰ $x \in R$ যাতে $x \geq 0$। গতিকে এইবোৰ x লৈ পৰিসৰৰ কিছুমান বিন্দু উলিয়াই লেখটো আঁকিবা, অৱশ্যে এই y বা $f(x) = \sqrt{x}$ সমীকৰণটো প্ৰথম ঘাতৰ নহয় কাৰণ ই সৰলৰেখা নহয়, সেয়ে তোমালোকে বহুতো বিন্দু বহুৱাইহে লেখাটো আঁকিব পাৰিবা। যেনে তলৰ ফলনকেইটাৰ মই লেখ আঁকি দিছো চোৱা। এইকেইটা বক্ৰৰেখাৰ লেখ, হ'লেও সিহঁতৰ সমীকৰণবোৰ দ্বিঘাত অৰ্থাৎ অজ্ঞাত চলকৰ ঘাত দুই।

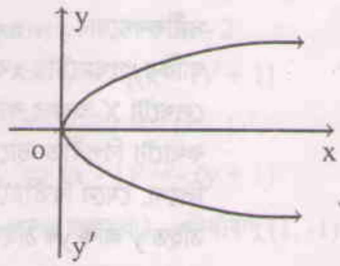
১) $y = \sqrt{x}$ অৰ্থাৎ $y^2 = x$।

$\sqrt{x}$ৰ অৰ্থ xৰ যোগাত্মক বৰ্গমূল। তাৰোপৰি ইয়াত আদিক্ষেত্ৰ $x \geq 0$ দিয়া আছেকাৰণ $y = \sqrt{x}$ । গতিকে লেখটো হ'ব এনে। (আঁকি দিয়ে)



নীলাক্ষি ঃ ছাৰ, $y^2 = x$ৰ লেখ আঁকিব নোৱাৰি নেকি?

ছাৰ ঃ কিয় নোৱাৰিবা? পাৰিবা, কাৰণ যি কোনো সম্পৰ্ক মাত্ৰেই একোটা লেখ পাবা, যদিও $y^2 = x$ এটা ফলন নহয়, ইয়াৰ সম্পৰ্ক হিচাপে লেখটো এনে হ'ব (আঁকে)



$y = \pm \sqrt{x}\ (x \geq 0)$, অৰ্থাৎ প্ৰতিটো যোগাত্মক xৰ অনুৰূপে yৰ দুটাকৈ মান আছে। সেয়ে লেখটোৰ দুটা শাখা থাকিব, এটা X-অক্ষৰ ওপৰ, আনটো তলৰ পিনে X-অক্ষত সমমিতি হৈ।

এই লেখটোৰ নাম অধিবৃত্ত (বা parabola)। ইয়াৰ প্ৰতিটো শাখাই অসীমলৈ গতি কৰিব যিহেতু $x \to \infty$ ।

অংকিত ঃ ছাৰ, লেখ এটা যে আধিবৃত্ত হ'ব আমি কেনেকৈ জানিম?

ছাৰ ঃ মনত ৰাখিবা, যিবোৰ সমীকৰণক $y^2 = kx$ নাইবা $(y-b)^2 = k(x-a)$ ৰূপত লিখিব পাৰি, সেই আটাইবোৰেই অধিবৃত্ত। যেনে, মই কেইটামান সৰল সমীকৰণ আৰু সিহঁতৰ লেখ দেখুৱাইছো (ছাৰে আঁকে)

(i) $y^2 = 4x$ (ii) $y^2 = -4x$ (iii) $x^2 = 4y$

(iv) $x^2 = -4y$ (v) $y^2 = 2(x-1)$ (vi) $(y - 2)^2 = 4(x+1)$

(vii) $y = x^2 - 6x + 5$ (viii) $y = -x^2 + 2x - 1$

এই আটাইবোৰেই $(y - b)^2 = k(x - a)$ নাইবা $(x - a)^2 = k(y - b)$ আৰ্হিৰ। ইয়াত k ধ্ৰুৱক সংখ্যাটো যোগাত্মক বা বিয়োগাত্মকো হ'ব পাৰে।

যদি $k > 0$ তেন্তে লেখটো Y নাইবা X-অক্ষৰ যোগাত্মক দিশে আৰু যদি $k < 0$ তেন্তে লেখটো Y নাইবা X-অক্ষৰ বিয়োগাত্মক দিশে মেল খোৱা হ'ব।

উদাহৰণ স্বৰূপে (v)ৰ লেখটো হ'ব $(y-0)^2 = 2(x-1)$

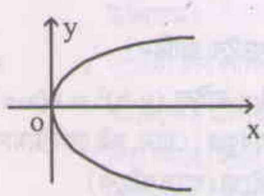
$\Rightarrow$ ইয়াত $k = 2 > 0$ আৰু অধিবৃত্তৰ শীৰ্ষবিন্দু হ'ব (1, 0)।

(viii)ৰ লেখটো বেলেগে লিখিলে, $(x - 3)^2 = (y - 4)$। ইয়াত $k = 1$, শীৰ্ষ বিন্দু (3, 4) আৰু অধিবৃত্তটো X-অক্ষৰ ওপৰ পিনে Yৰ যোগাত্মক দিশত মেলখোৱা হৈ থাকিব।

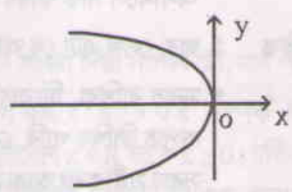
সমীকৰণবোৰ $y = ax^2 + bx + c$ নাইবা $x = ay^2 + by + c$ আৰ্হিত থাকিব। প্ৰথমটোত xৰ যিদুটা মানৰ ক্ষেত্ৰত $y = 0$ হয়, অৰ্থাৎ যি বিন্দুত লেখটো X-অক্ষত কাটে সিহঁতৰ x স্থানাংকই সমীকৰণটোৰ মূল হ'ব। কথাটো বিপৰীত ভাবেও সত্য। একে কথাই খাটিব যদি xৰ ঠাইত y লিখো, যেনে দ্বিতীয়টো সমীকৰণ। ইয়াত কেৱল অক্ষ দুটাৰ নাম xৰ ঠাইত y আৰু yৰ ঠাইত x হ'ব।

এতিয়া ওপৰত লিখা সমীকৰণবোৰৰ লেখকেইটা কেনে আকৃতিৰ হ'ব মই আঁকি দিছো। কথাবোৰ মিলাই চোৱা।

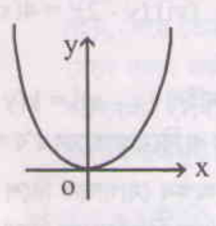
(i) $y^2 = 4x$



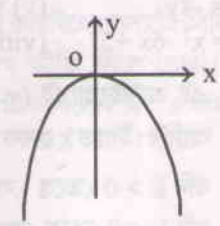
(ii) $y^2 = -4x$



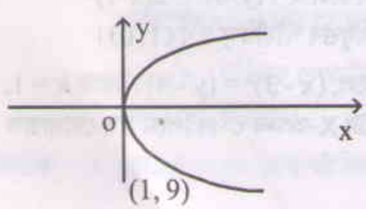
(iii) $x^2 = 4y$



(iv) $x^2 = -4y$

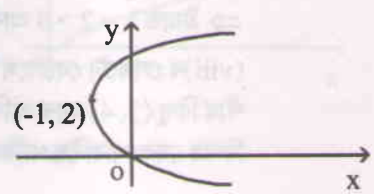


(v) $y^2 = 2(x - 1)$



(vi) $(y - 2)^2 = 4(x + 1)$

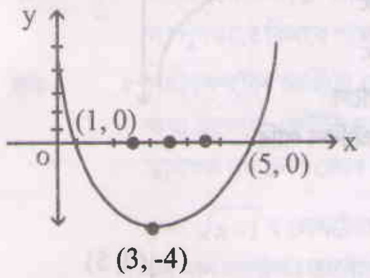
শীৰ্ষবিন্দু (-1, 2)



(vii) $y = x^2 - 6x + 5$

বা $(x - 3)^2 = y + 4$

শীৰ্ষবিন্দু (3, -4)



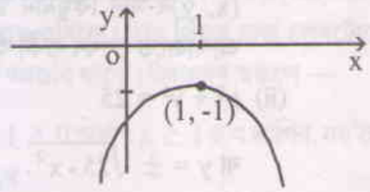
(viii) $y = -x^2 + 2x - 2$

$\Rightarrow y = -[(x - 1)^2 + 1]$

$\Rightarrow y + 1 = -(x - 1)^2$

$\Rightarrow (x - 1)^2 = -(y + 1)$

(লেখ তলমুৰা)   শীৰ্ষবিন্দু (1, -1)



লেখ আঁকিবলৈ ওপৰৰ আদৰ্শ ৰূপত লিখি লোৱা। শীৰ্ষবিন্দু উলিয়াই $x = 0$ হ'লে y কি হ'ব, নাইবা $y = 0$ হ'লে x কি হ'ব প্ৰথমে উলিওৱা। পিছত এখন মোটামুটিকৈ তালিকা এইদৰে প্ৰকাশ কৰা। যেনে—

(vii)

x	-1	0	1	3	5	6
y	12	5	0	-4	0	5

(viii)

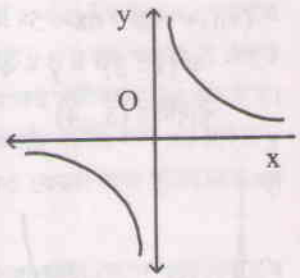
x	-2	-1	0	1	2	4
y	-10	-5	-2	-1	-2	-10

তাৰ পিছত তোমালোকৰ লেখটো আঁকিবলৈ উজু হ'ব।

প্ৰবাল ঃ আদৰ্শ ৰূপত নথকা সমীকৰণৰ লেখবোৰ কিদৰে অঁকা হয়?

ছাত্ৰ ঃ মনত ৰাখিবা, আটাইবোৰ $ax^2 + bx + c$ দ্বিঘাত ৰাশি যাক আমি y বা অইন এটা চলকেৰে বুজাও, এনেবোৰ এটা চলকৰ ৰাশিবোৰক সদায় আদৰ্শ ৰূপত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি আৰু এইবোৰে একোটা অধিবৃত্তহে বুজাব। দ্বিঘাত নহৈ যদি বেছি ঘাতৰ হয় তেন্তে ইহঁতে অধিবৃত্ত নহৈ অইন বেঁকাৰেখা কিছুমানৰহে সমীকৰণ বুজাব, যিবোৰ অঁকাটো ক্ষেত্ৰবিশেষে বৰ জটিল। কিন্তু দুটা চলকৰ সমীকৰণ যদি দ্বিঘাত হয় আৰু যিবোৰ $y = f(x)$ ৰূপত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি, তেনে বেছিভাগৰে লেখ অঁকাটো সহজ ; অৱশ্যে অকাৰ আগতে লেখটোৰ আকৃতি প্ৰকৃতি আৰু কিছুমান চৰিত্ৰ জানি ল'লে বেছি সহজ হ'ব। এইবোৰৰ বিতং বিৱৰণ অলপ উচ্চ গণিতত দিয়া আছে। তথাপিও কিছুমান সৰল লেখ আমি ইয়াতে আঁকিব পাৰো। যেনে—

(i) $xy = 1$ বা $y = \frac{1}{x}$ ৰ লেখ



এনেকুৱা (চিত্ৰত আঁকি)

ইয়াত $x \to 0$ হ'লে $y \to \pm \infty$

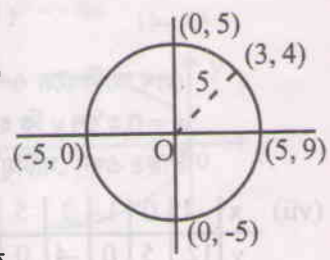
$y \to 0$ হ'লে $x \to \pm \infty$

(x, y)ৰ মান কিছুমান উলিয়ালে আন্দাজতে লেখৰ বাকী অংশ আঁকিব পাৰি।

(ii) $x^2 + y^2 = 25$

বা $y = \pm \sqrt{25 - x^2}$

যি এটা (0, 0) কেন্দ্ৰৰ আৰু 5 ব্যাসাৰ্দ্ধৰ বৃত্ত।



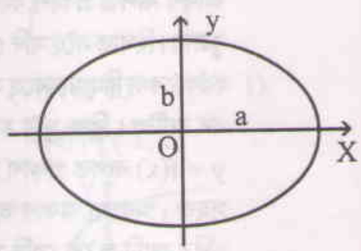
একেদৰে

$(x - h)^2 + (y - x)^2 = R^2$

আৰ্হিত লিখিব পৰা x, yত দ্বিঘাত সমীকৰণ এটাই এটা বৃত্ত বুজাব যাৰ কেন্দ্ৰ (h, k) আৰু ব্যাসাৰ্দ্ধ R ।

নিপুকণ ঃ ইয়াত x^2 আৰু y^2ৰ সহগ দুটা সমান। যদি বেলেগ বেলেগ হয়, আৰু যদি x, y লগ লাগি থাকে তেতিয়াও ই বৃত্ত হৈয়েই থাকিব নেকি?

স্যৰ ঃ ভাল প্ৰশ্নই সুধিছা। প্ৰকৃততে যদি সমীকৰণটো $Ax^2 + By^2 = 1$ আৰ্হিৰ হয়, য'ত a, b > 0, তেন্তে ইএটা সমীকৰণ য'ত x^2, y^2ৰ সহগ দুটা বেলেগ আৰু xy লগ লাগি নাথাকে। এনে সমীকৰণ সাধাৰণতে এটা উপবৃত্ত হয়।



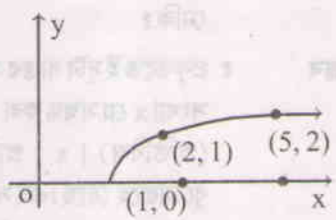
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$Ax^2 - By^2 = 1$ আৰ্হিৰ সমীকৰণবোৰ সাধাৰণতে একোটা পৰাবৃত্ত। উপবৃত্তৰ বিষয়ে তোমালোকে আগতে অলপ পাই আহিছা। এইবোৰৰ বিষয়ে আমি আজি বিশেষ আৰু আলোচনা নকৰোঁ।

অংকিত ঃ ছাৰ, লেখৰ বিষয়ে আমি কিছু কথা শিকিলো। বিন্দু লেখ আঁকিবলৈ আমি সমীকৰণত আটাইবোৰ বিন্দু বহুৱাই চাব নোৱাৰো। লেখটো সম্পূৰ্ণভাৱে কিদৰে পাম?

ছাৰ ঃ সমীকৰণটোৰ আৰ্হিটো তোমালোকে প্ৰথমে ভালদৰে ৰিজাবা। এই আৰ্হিৰ কথা আগতে কেইটামান উল্লেখ কৰিছো। তাৰ পিছত চাবা লেখটোৱে স্থানাংক সমতলৰ কোন অংশ আগুৰি থাকে। উদাহৰণ স্বৰূপে —

$y = \sqrt{x-1}$ ৰ লেখটোত $x - 1 \geq 0$ অৰ্থাৎ $x \geq 1$ হ'ব লাগিব, নহ'লে yৰ মান নাপাবা। তাৰোপৰি yৰ মানত বৰ্গমূল আছে কাৰণে ই যোগাত্মক বৰ্গমূলহে বুজাব, গতিকে $y \geq 0$। সমীকৰণটোত x বাঢ়িলে y বাঢ়ে, আকৌ $x \to \infty, y \to \infty$। সেয়ে ইয়াৰ লেখটো মই আঁকি দেখুৱাৰ দৰে হ'ব। এই ধাৰণাৰে কেইটামান



বিন্দু বহুৱাই এটা সন্তত ৰেখাৰে অধিবৃত্তৰ আকৃতিত লেখটো অঁকা হৈছে। মন কৰা ইয়াত $y^2 = x - 1$ এটা অধিবৃত্ত আৰু ই স্থানাংক সমতলখনৰ প্ৰথম চোকটোতহে থাকিব।

নীলাক্ষি ঃ এনে দৰ্কাৰী উদাহৰণ আৰু কেইটামান ক'ব নেকি?

ছাৰ ঃ তোমালোকৰ কাৰণে অতি দৰ্কাৰী উদাহৰণ কেইটামান এনে— লিখি লোৱা।

(i) $y = |x|$ অৰ্থাৎ $y = x$ যদি $x \geq 0$

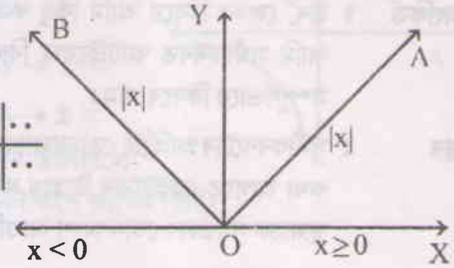
$= -x$ যদি $x < 0$

এইটোক মাপাংক ফলন (Absolute value function) বোলে।

ইয়াৰ লেখটো এনে—

(ছাৰে লেখটো কিদৰে আঁকা হ'ল বুজাই দিয়ে)

x	..	-3	-2	-1	0	1	2	3	..
y	..	3	2	1	0	1	2	3	..



প্ৰবাল ঃ ছাৰ, এই | x | ফলনটো আচলতে কি সম্পৰ্ক অলপ আৰু বুজাই দিব নেকি ?

ছাৰ ঃ প্ৰকৃততে ই দুটা বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতিৰ মাজত এটা সম্পৰ্ক। এটা বাস্তৱ সংখ্যা x য়ে সম্বন্ধ কৰা মৌলটোক (প্ৰতিবিম্ব) | x | প্ৰতীকটোৰে বুজোৱাহে হৈছে। এই সম্পৰ্কটোক সুবিধাৰ বাবে f, g আদি নাম নিদি | | প্ৰতীকেৰে বুজোৱা হৈছে ; যেনে 2ৰ প্ৰতিবিম্ব | 2 |, -3ৰ প্ৰতিবিম্ব | -3 | । এই সম্বন্ধটোৱে অবিয়োগাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা এটাক তাৰ নিজৰ লগত আৰু বিয়োগাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা এটাক তাৰ বিয়োগাত্মক অৰ্থাৎ অনুৰূপ যোগাত্মক সংখ্যাটোৰ লগত সম্পৰ্ক কৰায়।

$f = |\ |$

$x \to |x|$

$3 \longrightarrow 3 = |3|$

$2.5 \longrightarrow 2.5 = |2.5|$

$2 \longrightarrow 2 = |2|$

$\pi \longrightarrow \pi = |\pi|$

$1 \longrightarrow 1 = |1|$

$0 \longrightarrow 0 = |0|$

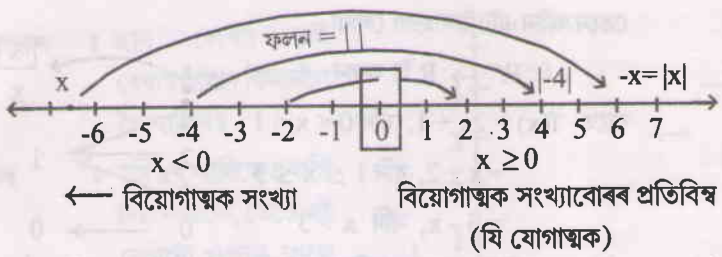
$-.5 \longrightarrow .5 = |-.5|$

$-1 \longrightarrow 1 = |-1|$

$-3 \longrightarrow 3 = |-3|$

$-\pi \longrightarrow \pi = |-\pi|$

যেনে | 2 | = 2, কিন্তু | -3 | = -(-3) = 3। মই আঁকি দিছো চোৱা। আনহাতে যোগাত্মক সংখ্যাবোৰৰ ফলনীয় মান একেই। এতিয়া কোৱা, এই ফলনটো এক-এক হ'বনে ?



নয়ন : এক-এক নহয় ছাৰ, কাৰণ $-x$ আৰু xৰ প্ৰতিবিম্ব একে ;
যেনে $|-2| = 2 = |2|$ আদি।

ছাৰ : সৰল ভাষাত $|x|$য়ে বাস্তৱ ৰেখাটোত 0ৰ পৰা xৰ দূৰত্বৰ মান বুজায়।
এতিয়া কোৱা, $\frac{|x|}{x}$ য়ে কি বুজাব?

নীলিমা : ছাৰ যদি $x > 0$, $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$

আৰু যদি $x < 0$, $\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$

আৰু যদি $x = 0$, তেন্তে তেন্তে ...

ছাৰ : (হাঁহি) তেন্তে

$\frac{0}{0}$ হ'ব, অৰ্থাৎ $x = 0$ বিন্দুত $\frac{|x|}{x}$ ফলনটো নবৰ্তে, যদিহে 0ত ইয়াক বেলেগ ধৰণে সংজ্ঞা দিয়া নহয়।

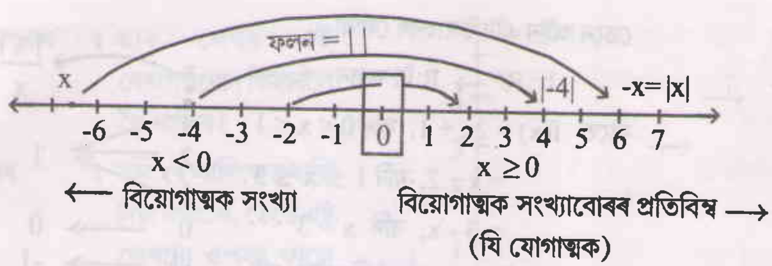
নীলাক্ষি : ছাৰ, বেলেগ ধৰণেও সংজ্ঞা দিব পাৰিব নেকি?

ছাৰ : এৰা পাৰিবতো, সম্বন্ধ মানে কি, এটাৰ লগত যি কোনো এটাক কাঁড় এডাল লগাই দিলেই হ'ল।

যেনে, $\frac{|x|}{x} = 0$ যদি $x = 0$

$= 1$ যদি $x > 0$

$= -1$ যদি $x < 0$



নয়ন ঃ এক-এক নহয় ছাৰ, কাৰণ -x আৰু xৰ প্ৰতিবিম্ব একে ; যেনে $|-2| = 2 = |2|$ আদি।

ছাৰ ঃ সৰল ভাষাত $|x|$য়ে বাস্তৱ ৰেখাটোত 0ৰ পৰা xৰ দূৰত্বৰ মান বুজায়। এতিয়া কোৱা, $\frac{|x|}{x}$ য়ে কি বুজাব?

নীলিমা ঃ ছাৰ যদি $x > 0$, $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$

আৰু যদি $x < 0$, $\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$

আৰু যদি $x = 0$, তেন্তে তেন্তে ...

ছাৰ ঃ (হাঁহি) তেন্তে $\frac{0}{0}$ হ'ব, অৰ্থাৎ $x = 0$ বিন্দুত $\frac{|x|}{x}$ ফলনটো নবৰ্তে, যদিহে 0ত ইয়াক বেলেগ ধৰণে সংজ্ঞা দিয়া নহয়।

নীলাক্ষি ঃ ছাৰ, বেলেগ ধৰণেও সংজ্ঞা দিব পাৰিব নেকি?

ছাৰ ঃ এৰা পাৰিবতো, সম্বন্ধ মানে কি, এটাৰ লগত যি কোনো এটাক কাঁড় এডাল লগাই দিলেই হ'ল।

যেনে, $\frac{|x|}{x} = 0$ যদি $x = 0$

$= 1$ যদি $x > 0$

$= -1$ যদি $x < 0$

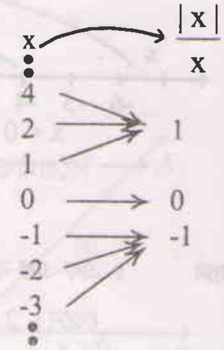
তেনে অইন এটা উদাহৰণ লোৱা

$f : R^+ \to R$ টা ফলন

যাতে $f(x) = 2x + 1$, যদি $0 < x < 1$

$= x + 2$, যদি $1 \leq x \leq 3$

$= 3 - x$, যদি $x > 3$



এই ফলনটোৰ লেখ আঁকি বলৈ মই তোমালোকক ঘৰৰ কাম দিলো। অইন এটা উদাহৰণ চোৱা।

ধৰা (x)ৰ অৰ্থ বৃহত্তম অখণ্ড সংখ্যা যি x অতকৈ সৰু বা সমান, যেনে—

$[x] = 2$ যদি $2 \leq x < 3$

$= 1$ যদি $1 \leq x < 2$

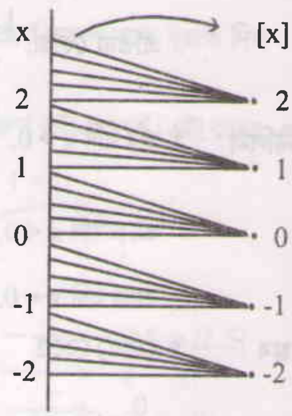
$= 0$ যদি $0 \leq x < 1$

$= -1$ যদি $-1 \leq x < 0$

$= -2$ যদি $-2 \leq x < -1$

ইত্যাদি।

$\therefore$ x যিয়েই নহওক [x] সদায় এটা অখণ্ড সংখ্যা, চিত্রত দিয়া ধৰণে।



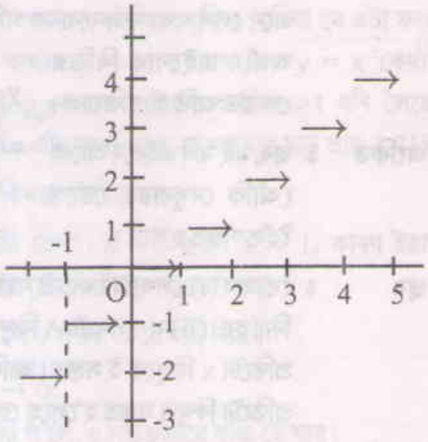
প্ৰবাল ঃ ছাৰ, এই ফলনটোৰ লেখ আপোনাৰ দৰে আঁকিলে হ'ব নেকি?

নিয়ৰ/নীলিমা ঃ এঃ কিয় হ'ব? ছাৰে সম্পৰ্কটো বুজাইহে দিছে।

ছাৰ ঃ হয়। ইয়াৰ লেখটোও বাৰু মই আঁকিয়েই দিছো ৰ'বা। কিন্তু তাৰ আগতে আদিক্ষেত্ৰটো বুজি ল'ব লাগিব। যেনে যদি $1 \leq x < 2$ অৰ্থাৎ $[1, 2)$ অন্তৰালৰ পৰা এটা বিন্দু x লোৱা, তেন্তে বিন্দুটো $x = 1$ৰ পৰা $x = 2$ৰ আগলৈকে যিকোনো হ'ব পাৰে, আৰু এই অঞ্চলত yৰ মান সদায় 1। গতিকে লেখটো এনে ধৰণৰ হ'ব। মন কৰা যে অখণ্ড সংখ্যাবোৰত লেখটো জাপ মাৰি মাৰি গৈ আছে।

নিপুকণ ঃ ছাৰ লেখৰ এই ৰেখাখণ্ডবোৰ কিমানলৈ গৈ থাকিব ?

ছাৰ ঃ যদি xৰ আদিক্ষেত্ৰ বান্ধি দিয়া নাথাকে, তেন্তে এই লেখটো ওপৰৰ ফালে অসীমভাৱে আৰু তলৰ পিনেও সীমহীনভাৱে আগবাঢ়ি গৈ থাকিব।



নীলিমা ঃ ছাৰ, ফলনটো দেখোন এখন খটখটী হ'ল !

ছাৰ ঃ এৰা, এইখন এখন সীমাহীন জখলা। ৰজা যুধিষ্ঠিৰে এনে এখন জখলাৰেই বগাই গৈ কুকুৰসহ সৰগ পাইছিলগৈ।

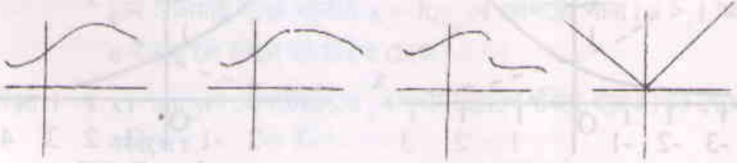
আটায়ে ঃ (গিৰ্জ্জনী মাৰি হাঁহে)

নিপুকণ ঃ ছাৰ, জখলাখন কতো ভগাছিগা নাইনে ?

ছাৰ ঃ ভাল কথাই সুধিছা। ভগাছিগাৰ কথা বাদেই ক'তো এটা ফুটাও নাই, কাৰণ প্ৰতিটো xৰ কাৰণেই yৰ মান এটা আছেই, লক্ষ্য কৰা। যেনে 3 বিন্দুত yৰ মান 3, অথচ 3ৰ ঠিক আগৰ প্ৰতিটো বিন্দুত y মান 2। গতিকে ফাঁক নাই। অৱশ্যে xৰ খণ্ড মানবোৰত লেখটো সন্তত (continuous) নহয়।

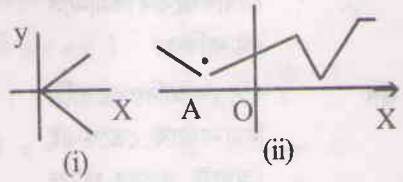
নীলাক্ষি ঃ ছাৰ, সন্তত মানে কি ?

ছাৰ ঃ যিবোৰ ফলনৰ লেখ বিচ্ছিন্ন নহয়, অৰ্থাৎ যিবোৰ হাত নুঠোৱাকৈ মুক্তভাৱে আঁকিব পাৰি, যাৰ ফাঁকফুক, নাই, যাৰ ফুটা নাই, যিবোৰ উঠানমা কৰিলেও আমি আঁকা হাতখনো উঠাব নালাগে। তলত দুয়োবিধৰে চিত্ৰ কেইটামান আঁকিছো চোৱা (ছাৰে আঁকে)।



সন্তত   সন্তত নহয়   সন্তত নহয়   সন্তত

এনে লেখ থকা ফলনবোৰক গণিতৰ বেছিভাগ ক্ষেত্ৰই স্বাগতম জনায়। অৰ্থাৎ এইবোৰ বিভিন্ন ক্ষেত্ৰত অতি লাগতিয়াল।



অংকিত ঃ ছাৰ, মই যদি এইদৰে আঁকো (আঁকি দেখুৱায়), তেন্তে ইহঁত সন্তত হ'বনে?

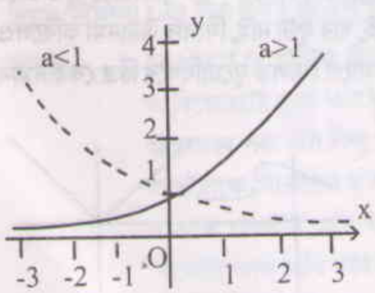
ছাৰ ঃ তোমাৰ (i) লেখটো ফলনেই নহয়, সন্ততি ফলনৰ ক্ষেত্ৰতহে সন্ততিৰ সংজ্ঞা দিয়া হয়। (ii)নং লেখটো A বিন্দুত সন্তত নহয়। কিন্তু Aৰ পিছৰ সোঁফাললৈ প্ৰতিটো x বিন্দুতে ই সন্তত। আদিক্ষেত্ৰ যদি ধৰি দিয়া থাকে, তেন্তে ইয়াৰ প্ৰতিটো বিন্দুত সন্তত হ'লেহে লেখটো তাত সন্তত বুলি ক'ব পাৰি।

নীলাক্ষি ঃ ছাৰ, আমাৰ গণিতত $\log_e x$ বা ঘাতাংক আৰু সূচক যেনে 2^x আদি পাইছো। ইয়াত অজ্ঞাত চলক x আছে, গতিকে এইবোৰক y লিখিলে ইহঁত নিশ্চয় একোটা xৰ ফলন হ'ব। এইবোৰৰ লেখ আঁকিব পাৰিনে ছাৰ?

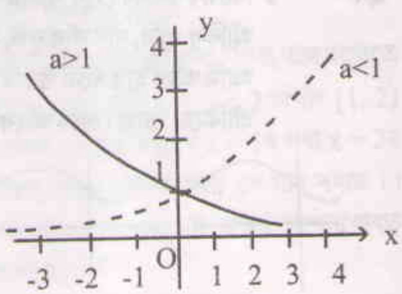
ছাৰ ঃ চব ফলনৰে লেখ আঁকিব পাৰি বুলি আমি আগতেই কৈছো। প্ৰকৃততে তুমি ভাল প্ৰশ্নই উত্থাপন কৰিছা। এনেবোৰ ফলন আৰু লেখ তোমালোকক পিছলৈ সদায় লাগিব আৰু জানি থ'লে বহুতো সমস্যাৰ গাণিতিক চৰিত্ৰ বিশ্লেষণ কৰিব পাৰিবা।

নিপুকণ ঃ ছাৰ এনে দুবিধ ফলনৰ লেখৰ বিষয়ে ক'ব নেকি?

ছাৰ ঃ $y = a^x$ আৰু $x = \log_a y$ এই দুয়োটা সম্পৰ্কই একেটা ফলন। প্ৰথমটোক আমি সূচক ফলন (exponential fucntion) আৰু দ্বিতীয়টোক ঘাতাংক ফলন (logaritham fucntion) বুলিম। বোৰ্ডত মই (আঁকি উঠি) অঁকা



$y = a^x$ ৰ লেখ



$x = \log_a y$ৰ লেখ

এই ফলন দুটা একেখন কাকতত আঁকিলে বুজিব পাৰিবা যে এটা ফলন অইনটোৰ বিপৰীত, অৰ্থাৎ $y = a^x$ ৰ লেখটোৰ $y = x$ ৰেখাত প্ৰতিফলনটোৱে $x = \log_a y$ৰ লেখ। ইয়াত আমি $a > 1$ ধৰি লৈছো, যেনে $a = 2$ বা $a = e$ (e এটা অপৰিমেয় সংখ্যা যাৰ মান প্ৰায় 2.718)

নীলিমা ঃ ছাৰ, লেখ দুটা আপুনি কিদৰে আঁকিলে?

ছাৰ ঃ প্ৰথমে $y = a^x$ লেখটো চোৱা। $x = 0$ হ'লে $a^0 = 1$, কাৰণ ইয়াত $a > 1$। গতিকে লেখটো (0, 1) বিন্দুৰ মাজেৰে যাব।

(i) ইয়াত x বাঢ়ি গৈ থাকিলে y সন্তত ভাৱে বাঢ়ি যায়।

যেতিয়া $x \rightarrow \propto, y \rightarrow \propto$

(ii) x বিয়োগাত্মকভাৱে বাঢ়ি গ'লে, y সন্ততভাৱে বৃদ্ধি হৈ যাব।

যেতিয়া $x \rightarrow -\propto, y \rightarrow 0$।

(iii) $x = 0$ হ'লে $y = 1$; কিন্তু যেতিয়া $x < 0, y < 1$।

(iv) সকলো xৰ ক্ষেত্ৰত $y > 0$, আৰু কোনো বাস্তৱ সংখ্যা xৰ ক্ষেত্ৰতেই $y \neq 0$।

আনভাষাত লেখটো সদায় X-অক্ষৰ ওপৰত থাকিব।

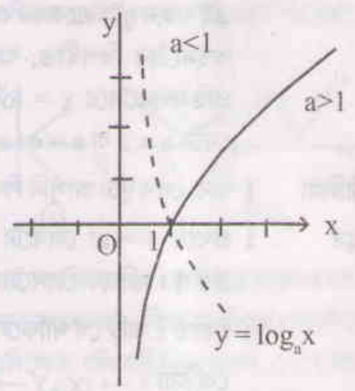
ঠিক একে যুক্তিৰেই $a < 1$ হ'লে $y = a^x$ ৰ লেখটো একে আকৃতিতে পাবা, কিন্তু সম্পূৰ্ণ বিপৰীত দিশত। এয়া চোৱা, মই ডটৰেখাৰে আঁকি দিলো।

নিয়ন ঃ ছাৰ, কিন্তু মাজত অন্ততঃ কেইটামান বিন্দু নাপালে আমি কেনেকৈ জানিম ৰেখাবোৰৰ আচল পথটো কি?

ছাৰ ঃ তোমালোকে মাজত কেইটামান বিন্দু উলিয়াব লাগিব। a ৰ মান দিয়া থাকিলে এইটো তেনেই সহজ, সূচকৰ মানটো উলিয়ালেই হ'ল। একেদৰে তোমালোকে কেইটামান y ৰ মান ধৰি তালিকাৰ সহায়ত $x = \log_a y$ৰ মান উলিয়াই যুক্তি খটুৱাই $x = \log_a y$ৰ লেখটো পাবা। $a > 1$ আৰু $a < 1$ হ'লে কেনে হয় চিত্ৰত চোৱা।

নীলিমা ঃ $x = \log_a y$ ৰ লেখটোত xক yৰ ফলন হিচাপে ধৰিছে, ইয়াত কিয় বেলেগ কৰিলে?

ছাৰ ঃ মই অক্ষৰেখা দুটা একে ৰাখি আঁকিছো কাৰণে এনে কৰিবলগীয়া হ'ল। যদি $y = \log_a x$ৰ লেখটো আঁকা তেন্তে লেখটো এনে হ'ব (আঁকি দিয়ে)। মাত্ৰ xৰ ঠাইত y আৰু yৰ ঠাইত x লিখি লেখটো লুটিয়াই দিবা।



ঘাতাংক $\log_a x$ৰ লেখটোত মন কৰা (ধৰা $a > 1$)।

যদি $x = 0$ তেন্তে $\log_a x$ নবৰ্তে।

যদি $x_1 < x_2$ তেন্তে $\log_a x_1 < \log_a x_2$ অৰ্থাৎ x বাঢ়িলে y বাঢ়ে।

যদি $x = 1, y = 0$, অৰ্থাৎ লেখটো (1, 0)ৰ মাজেৰে যায়।

যদি $0 < x < 1, \log_a x < 0$ অৰ্থাৎ y বিয়োগাত্মক।

যদি $x \longrightarrow +, \log x \longrightarrow \propto$, যদি $x \longrightarrow 0, y \longrightarrow - \propto$

যদি $x < 0$, তেন্তে yৰ মান নাই ; অৰ্থাৎ লেখটো y-অক্ষৰ বাওফালে নাথাকে।

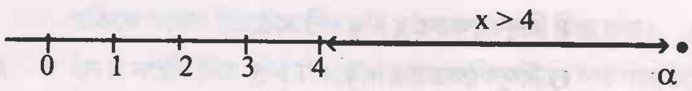
এতিয়া আমি সমীকৰণৰ লেখৰ বিষয়ে ইমানতে সামৰিলো। আৰু কাৰোবাৰ মনত কিবা সুধিবলগীয়া কথা আছে নেকি?

নিপুকণ ঃ ছাৰ যিবোৰ সমীকৰণ নহয়, তেনে সম্পৰ্কৰো লেখ আঁকিব পাৰি নেকি?

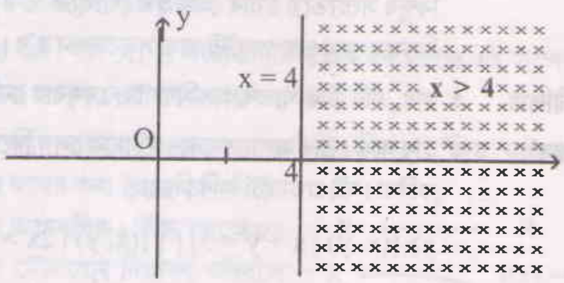
ছাৰ ঃ বঢ়িয়া প্ৰশ্ন সধিছা। যিবোৰ সম্পৰ্ক সমীকৰণ নহয়, সিহঁতক অসমীকৰণ বা অসমিকা (inequation) বোলে। যেনে $x < 9, 2x + 3y \leq 5, x^2 + y^2 - 4 \geq 0$ ইত্যাদি।

ধৰা তোমাক $x > 4$ অসমিকাটোৰ লেখ আঁকিব লাগে। অঁকাৰ আগতে তুমি অসমিকাটো সিদ্ধ কৰা বিন্দুবোৰ উলিয়াব লাগে, অৰ্থাৎ তুমি $x > 4$ৰ সমাধানবোৰ প্ৰথমে পাব লাগিব।

এটা ৰেখাৰ ওপৰত এই সমাধানবোৰ হ'ব 4.1, 5, 7, 9... ইত্যাদি। আমাৰ লেখটো এনে হ'ব (আঁকে)।



অৰ্থাৎ 4 বিন্দুটো বাদ দি আটাইবোৰ বাস্তৱ সংখ্যা। এই একেটা লেখকে আকৌ দ্বিবিমীয় স্থানাংক সমতলত যদি আঁকিব কোৱা হয় আমি কি কৰিম?

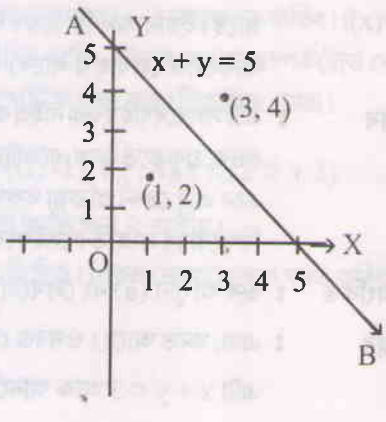


লক্ষ্য কৰা যে $x = 4$ এটা সৰলৰেখা যি Y-অক্ষৰ সমান্তৰাল। এই সৰলৰেখাৰ সোঁহাতে যিকোনো বিন্দু এটা লোৱা, যেনে (5, 4)। এনে প্ৰতিটো বিন্দুৰে x-স্থানাংক >4। গতিকে ইয়াত $x > 4$ৰ লেখ হ'ব মই চিত্ৰত * চিনেৰে দেখুৱা গোটেই ক্ষেত্ৰটো (region) এইখন এখন অৰ্দ্ধ সমতল (half-plane)। নিপুকণ কোৱাচোন এই লেখটোৰ ভিতৰত $x = 4$ ৰেখাটো থাকিবনে?

নিপুকণ ঃ নাথাকে ছাৰ।

ছাৰ ঃ এইবাৰ এটা লেখ আঁকো আহা, $x + y < 5$। তোমালোকে জানা যে $x + y = 5$ এটা সৰলৰেখা, মই আঁকি দিছো চোৱা।

AB ৰেখাটোৰ দুয়োফালে যিকোনো দুটা বিন্দু লোৱা। যেনে P = (1, 2) আৰু Q = (3, 4)



P বিন্দুৰ ক্ষেত্ৰত $x + y = 3 < 5$,

Q বিন্দুৰ ক্ষেত্ৰত $x + y = 7 > 5$

অৰ্থাৎ AB ৰেখাৰ তলপিনে থকা যিকোনো (x , y) বিন্দুৰ ক্ষেত্ৰতেই $x + y < 5$। গতিকে $x + y < 5$ অসমিকাটো সমাধান কৰা আটাইবোৰ বিন্দুৰ সংহতিয়ে ইয়াৰ লেখ হ'ব। গতিকে $x + y < 5$ৰ লেখ আঁকি ফুট চিনেৰে দেখুওৱা গোটেই অৰ্দ্ধ সমতলখন হ'ব।

নীলিমা : ছাৰ, এটা উচ্চ ঘাতৰ অসমিকা লৈ দেখুৱাব নেকি?

ছাৰ : হ'ব বাৰু। তাৰ আগতে তলৰ দুটামান লেখ দিছো, তোমালোকে অংকন কৰিবা। মই প্ৰথমটো কৰি দিছো।

a) $\{(x, y) \mid x + y < 3\} \cap \{(x, y) \mid 2x > y\}$

b) $y < 4 - x$ (c) $y \leq x^2$

d) $x^2 + y^2 < 16$ (e) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 16\}$

(f) $\{(x, y) \mid x + 1 < y\} \cap \{(x, y) \mid 4x + 5y < 20\}$

আটাইবোৰতে তোমালোকে প্ৰথমে <, > আদি অসমিকাৰ ঠাইত = চিন দি সমীকৰণ বনাই ল'বা। তাৰ পিছত অসমিকাৰ চিন অনুসৰি কোনবোৰ বিন্দু লেখবোৰত পৰে বিচাৰ কৰি চাই সমতলৰ অঞ্চলটো চিনি ল'লেই লেখটো পাবা।

নীলিমা : প্ৰথম আৰু (f) প্ৰশ্ন দুটাত সংহতি দুটাৰ মাজত ($\cap$) ছেদন প্ৰক্ৰিয়া দিয়া আছে। ইয়াৰ অৰ্থ কি ছাৰ? তাৰ মানে ছেদন, মিলন বা অন্তৰ (-) আদি থাকিলেও লেখ হ'ব পাৰে।

ছাৰ : এটা সলৰেখাই হওক নাইবা বক্ৰৰেখাই হওক নাইবা সমতলৰ এটা অঞ্চলেই হওক, প্ৰকৃততে লেখ একোটা কিছুমান বিন্দুৰ সংহতি। দুটা সংহতিৰ মাজত এনে এটা ছেদন প্ৰক্ৰিয়া থকাৰ অৰ্থ দুয়োটা লেখকে একে লগে সিদ্ধ কৰা বিন্দুবোৰৰ সংহতি। সেইদৰে মিলন বা অন্তৰ থাকিলেও সেইমতে হ'ব।

অংকিত : ছাৰ আপুনি (a) নং লেখটো কৰি দিয়াৰ কথা আছিল।

ছাৰ : এৰা, মনত আছে। ওপৰত কোৱামতে ইয়াত দুটা লেখ পাম। এটা $x + y < 3$ আৰু আনটো $2x > y$।

প্ৰথমে আমি $x + y = 3$ আৰু $2x = y$ ৰেখা দুটা আঁকি লম।

সৰলৰেখা অঁকাৰ সহজ উপায় হ'ল প্ৰথমে yত প্ৰকাশ কৰা।

যেনে $y = 3 - x$ আৰু $y = 2x$। এতিয়া—

$x = 0$ হ'লে $y =$ কিমান আৰু

$y = 0$ হ'লে $x =$ কিমান উলিয়াই দুটা দুটা বিন্দু পাই সৰলৰেখা দুটা আঁকি লোৱা।

এতিয়া ইয়াৰ পৰা $x + y < 3$ অৰ্দ্ধসমতলখন চিনি লোৱা।

সেইদৰে $2x > y$ অৰ্দ্ধসমতলখন চিনি লোৱা।

দুয়োটা ক্ষেত্ৰৰে (region) উমৈহতীয়া ক্ষেত্ৰটোৱে আমি পাবলগীয়া লেখটো হ'ব।

এতিয়া লেখ কাকত এখন লৈ আঁকো আহা।

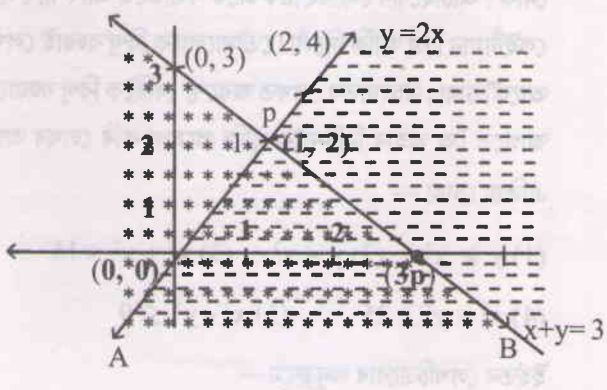
(বোৰ্ডত আঁকে)

(i) $x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - x$

(ii) $y = 2x$

x	0	3	2	1
y	3	0	1	2

x	0	1	2
y	0	2	4



কেইটামানকে বিন্দু প্ৰতিটো ৰেখাৰ বাবে বহুৱাই ৰেখা দুটা অঁকা হ'ল। দুয়োটা ৰেখাই (1, 2) বিন্দুত মিলিছে। কিদৰে জানিবা? সমীকৰণ দুটা সমাধা কৰি মিলাই চোৱা।

এতিয়া $x + y < 3$ সিদ্ধ হোৱাকৈ যিকোনো এটা বা দুটামান বিন্দু বহুৱা, যেনে (1, 1), (0, 2) আদি। গতিকে এনে বিন্দুবোৰ থকা ক্ষেত্ৰটোৱে $x + y < 3$ৰ লেখ হ'ব। ক্ষেত্ৰটো * তৰাৰে দেখুৱা। সেইদৰে $2x > y$ বা $y < 2x$ৰ ক্ষেত্ৰটো উলিয়াই তাক ... ফুট চিনেৰে দেখুৱা।

এই দুয়োটা ক্ষেত্ৰই কটাকটি কৰা ছেদন ক্ষেত্ৰটো চিত্ৰত দেখুৱা ধৰণে APO কোণ আকৃতিৰ ক্ষেত্ৰখিনিয়ে হ'ব।

গতিকে $\{(x, y): x + y < 3\} \cap \{(x, y) \mid 2x > y\}$ৰ লেখ AOB এই অসীম ক্ষেত্ৰটো হ'ব।

অৱশ্যে ইয়াৰ ভিতৰত ৰেখা দুয়োটাৰে বিন্দুবোৰ নাথাকিব।

এই একেদৰে তোমালোকে বাকীকেইটা লেখো আঁকিবা।

তেন্তে আজি আমি ইমানতে—

নীলিমা ঃ ছাৰ ছাৰ, মই যে কৈছিলো, এটা উচ্চঘাতৰ লেখৰ কথা।

ছাৰ ঃ ইমানখিনি কোৱাৰ পিছত মই আকৌ উচ্চঘাতৰ কথা ক'ব বাকী থাকিল নেকি? আটাইবোৰ লেখেই ঠিক একে পদ্ধতিতে আঁকিবা, যেনে মই তলত কেইটামান চিত্ৰ আঁকি দিলো। তোমালোকে বিন্দু বহুৱাই লেখবোৰ নিজে আকৌ চাবা। উচ্চঘাতৰ লেখত অৱশ্যে বেছিকৈ বিন্দু বহুৱাবলৈহে আৰু আগতে কৈ অহাৰ নিচিনাকৈ যুক্তি প্ৰয়োগ কৰি লেখৰ আকৃতি পাবা।

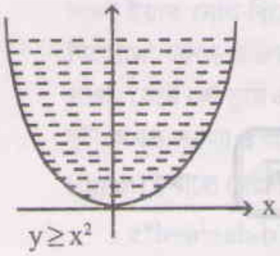
এতিয়া চোৱা —

(1) $y \geq x^2$ (2) $y < x^2$ (3) $x^2 + y^2 < 16$

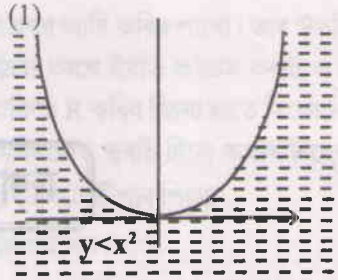
(4) $x^2 + y^2 \geq 25$ (5) $x^2 - y^2 \leq 9$

ইহঁতৰ লেখচিত্ৰবোৰ অনুক্ৰমে—

(1)

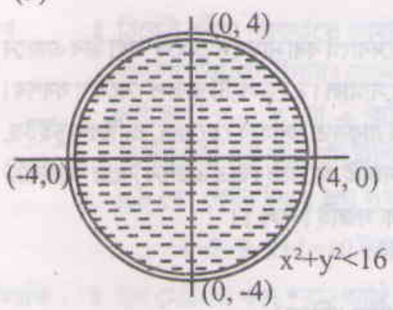


(1)

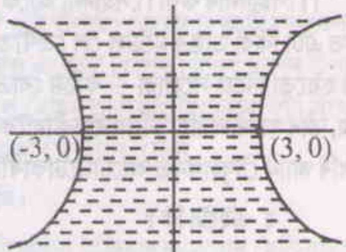


(প্ৰচ্ছাদিত ক্ষেত্ৰবোৰ অসীমলৈ যাব)

(3)



(4) একে ধৰণে কেৱল বৃত্তেৰে সৈতে বাহিৰৰ ক্ষেত্ৰটো



তেন্তে গুড নাইট। পুনৰ আকৌ লগ হ'ম।

আটায়ে ঃ নমস্কাৰ ছাৰ, গুডনাইট ছাৰ।

* * * * * * *

দশম দিন

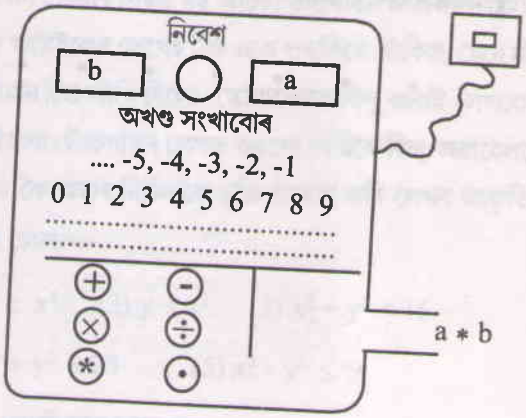
বিমূৰ্ত্তৰ অচিন চুকত লিমাকণহঁত

।। পিছদিনাৰ কথা। সেইদিনা আকৌ দেবাংগ বৰা নামৰ নতুনকৈ অহা ছাত্ৰ এজনে হাতত এটা কিবা ডাঙৰ মডেল লৈ শ্ৰেণীত সোমাল। ম'ডেলটো অলপ বেলেগ ধৰণৰ। ছাত্ৰে হয়তো নিজে সজোৱা— কঠিন বোৰ্ডৰ বাকচত লোহাৰ হেণ্ডেল, প্লাষ্টিকৰ চুইট্‌ছ, বুটাম, তাঁৰ আদি লগাই ধুনীয়া ৰংচঙীয়াকৈ সজাই আনিছে। ছাত্ৰ এজনে নিজে আগবাঢ়ি গৈ ধৰি আনি টেবুলখনত আটোমটোকাৰীকৈ সজাই দিলে ।।

ছাত্ৰ ঃ এইটো কি?

আটায়ে ঃ বাকচ ছাত্ৰ। (বুলি ডাঙৰকৈ হাঁহিব ধৰিলে)

ছাত্ৰ ঃ নহয়; এইটো এটা মেচিন। এই মেচিনটোৰ নাম সংক্ৰিয়া (প্ৰক্ৰিয়া) সম্পাদন (operation performing) মেচিন। অৰ্থাৎ তোমালোকৰ কেলকুলেটৰ



দৰেই ইয়াত যোগ-বিয়োগ, পূৰণ-হৰণ আদি কৰিব পাৰো। তাৰ উপৰি যিকোনো ধৰণৰ প্ৰক্ৰিয়া তুমি বিচৰা ধৰণে ইয়াত প্ৰ'গ্ৰেম কৰাই ল'ব পাৰা। যেনে ধৰা তুমি এনে এটা প্ৰক্ৰিয়া R কৰিব বিচৰা যাতে যিকোনো দুটা অখণ্ড সংখ্যা a আৰু bক মেচিনটোত ভৰাই দিলে অৰ্থাৎ নিবেশ (input) কৰালে মেচিনটোৱে ⊛ বুটামটো টিপাৰ পিছত

$a*b=a^2+ab-b$ ফলটো উলিয়াই দিব।

গতিকে মেচিনত 3 বুটাম টিপি * আৰু 4 সংখ্যা দুটা টিপিলে মেচিনে কি উলিয়াব কোৱাচোন।

প্ৰবাল ঃ ছাৰ $3*4=3^2+3.4-4=12$ উলিয়াব।

ছাৰ ঃ ঠিকেই ধৰিছা। প্ৰকৃততে আমাৰ মেচিনটো দুটা সংখ্যাক কিবা এক ধৰণে লগ লগোৱা এটা উপায়। যেনে * এটা উপায়। তেনেদৰে আমি সৰুৰেপৰা পাই অহা +, –, ×, বা ÷ আদিও একোটা বিশেষ বিশেষ ধৰণৰ উপায় বা সংক্ৰিয়া। ⊕ বুটামটো টিপিলে মেচিন প্ৰক্ৰিয়াই যিকোনো দুটা সংখ্যা a,b কে কেনে ধৰণে লগ লগাব লাগে জানে, যেনে

$4+5=9$, $9+1=10$ ইত্যাদি।

নীলাক্ষি ঃ ছাৰ মেচিনত থকা * বা • আদি যিকোনো প্ৰক্ৰিয়াৰ কামবোৰ মেচিনটোৱে কিদৰে জানে?

ছাৰ ঃ প্ৰক্ৰিয়াবোৰ আমি নিজে ঠিক কৰিহে মেচিনটোক কৰিবলৈ নিৰ্দেশ দিছো; আন ভাষাত প্ৰক্ৰিয়াবোৰ আমি নিজে সংজ্ঞা দি লোৱা। তুমি যেনেদৰে বিচৰা প্ৰক্ৰিয়া এটা সংজ্ঞা দি সেইমতে মেচিনটো সাজু কৰি ল'বা; যেনে তুমি যদি এটা প্ৰক্ৰিয়া * এনেদৰে সংজ্ঞা দিছা যাতে

$a*b=a-\frac{1}{b}$ নাইবা

$a*b=a^3-3a^2b+b^3$

আৰু মেচিনটোত এই প্ৰক্ৰিয়া এনেদৰে খাপ খুৱাই লোৱা তেন্তে এনে সূত্ৰ বা নিয়ম অনুসৰি যিকোনো দুটা সংখ্যা a, b কে লগ লগাই মেচিনটোৱে আমাক একোটা সংখ্যা দিব।

গতিকে 'প্ৰক্ৰিয়া' শব্দটোৱে অকল +, –, পূৰণ, হৰণ আদিহে যে বুজাব

লাগে এনে নহয়। আজিকালি আমাৰ গণিতত প্ৰক্ৰিয়া যিকোনো ধৰণেই সংজ্ঞা দিয়া হয়। অৱশ্যে আমি সংজ্ঞা দিওতে চাব লাগিব যাতে সংজ্ঞাবোৰ নিৰৰ্থক নহয়।

নিপুকণ : ছাৰ, তাৰ মানে আমি বুজিম নেকি যে মেচিনটোৱে যি কাম কৰে সিয়েই এটা প্ৰক্ৰিয়া।

ছাৰ : সম্পূৰ্ণ ঠিক। কৰা কামবোৰেই প্ৰক্ৰিয়া। এতিয়া মই যদি মেচিনটো উঠাই লৈ যাওঁ আৰু তোমালোকক কওঁ,

$a \cdot b = 3a + ab - b$ প্ৰক্ৰিয়াৰে (অৰ্থাৎ এই নিয়মটোৰে) 4, -7 ক লগ লগোৱা; তেন্তে কি পাবা?

নিপুকণ : ছাৰ $4.(-7) = 3.4 + 4.(-7)-(-7)$

$= 12 - 28 + 7 = -9$ হ'ব।

ছাৰ : বৰ ভাল। মন কৰা যে প্ৰক্ৰিয়াটো সংজ্ঞা দিওতে কিছুমান কথাও স্পষ্ট কৰিব লাগিব; যেনে বাওহাতৰ a.bত · টোৱে প্ৰক্ৰিয়াটোৰ প্ৰতীকহে বুজাইছে; যিটোৱে a আৰু b ক লগ লগাম ; কিন্তু সোঁহাতৰ ab নাইবা 3aয়ে আমাৰ সাধাৰণ 'পূৰণ' অৰ্থাৎ × বুজাইছে। তাৰোপৰি মাজৰ + বা – চিনবোৰে আমাৰ সাধাৰণ প্ৰক্ৰিয়া যোগ, বিয়োগহে বুজাইছো বুলি ধৰিব লাগে। কেতিয়াবা মাজৰ প্ৰক্ৰিয়াবোৰকো বেলেগ ধৰণে সংজ্ঞা দি বৰ্ণনা কৰা হয়, যেনে

$a*b = a \cdot b - ab$,

য'ত · প্ৰক্ৰিয়াটো এনে ধৰণৰ—

$a \cdot b = a^2-a+b$

গতিকে $2*3 = 2.3 -6 = (2^2- 2 + 3) - 6 = -1$

নীলাক্ষি : ছাৰ, তাৰ মানে প্ৰক্ৰিয়াৰ কাৰণে যিকোনো চিনেই ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি।

ছাৰ : এৰা পাৰি। আজিকালি উচ্চ গণিতত +, . আদি চিনবোৰ আমাৰ সাধাৰণ যোগ, পূৰণ নুবুজাবও পাৰে।

অৱশ্যে কি বুজায় আমাক ক'ৰবাত কৈ থয়।

ময়ুৰী : ছাৰ, মই এটা সোধো সোধো বুলি বহু পৰৰে পৰা ভাবি আছো। আপুৰি ছাৰ * (ষ্টাৰ) বা যি প্ৰক্ৰিয়াতে a,b যিকোনো দুটা সংখ্যা লগ লগাবলৈ

বুটাম টিপিলে আমাক মেচিনটোৱে এটা সংখ্যা দিব বুলি কৈছে। ধৰক মই $a * b$ক এইদৰে ল'লো

$a * b = a^2 + \frac{a}{b}$ আৰু মই * য়ে 3 আৰু 0ক কেনেদৰে লগ লগায় চালো; তেন্তে আমি কি পাম ছাৰ?

ছাৰ ঃ বঢ়িয়া প্ৰশ্ন। এটা প্ৰক্ৰিয়া সংজ্ঞা দিওতেই সাৱধান হ'ব লাগে বুলি মই আগতে কৈছিলো। তোমালোকৰ মনত আছেনে নাই নাজানো। প্ৰকৃততে তোমাৰ সংজ্ঞাত $a^2 + \frac{a}{b}$ বোলোতে $a \times a$ আৰু $a \div b$ আছে, আৰু এই পূৰণ, হৰণ দুটা সাধাৰণ প্ৰক্ৰিয়া। তোমালোকে সাধাৰণ হৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰ সংজ্ঞা বোধহয় জানা। $a \div b$ নবৰ্তে, অৰ্থাৎ $a \div b$ এটা সংখ্যা নহয় যদিহে $b=0$ হয়। গতিকে তোমাৰ সংজ্ঞাটো দিওতেই লগতে $b \neq 0$ বুলি দিব লাগিছিল। bক অশূন্য বুলি বাধা প্ৰদান নকৰিলে আমাৰ প্ৰক্ৰিয়াই, অৰ্থাৎ আমাৰ মেচিনে কোনো ফল দিব নোৱাৰিব।

মেঘালী ঃ সাধাৰণ হৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰ আচল সংজ্ঞা কি ছাৰ?

ছাৰ ঃ এইটো এটা অতি জৰুৰী আৰু জানিবলগীয়া কথা, এইটো নজনাৰ ফলতেই গণিতত অজস্ৰ বিভ্ৰম বিভ্ৰান্তিৰ সৃষ্টি হয়। যেনে,

$2 \times 0 = 3 \times 0$, গতিকে 0ৰে দুয়োফালে হৰণ কৰিলে $2=3$ হ'ব। (সকলোৱে হাঁহিলে)। এতিয়া কও শুনা, লিখি লোৱা—

সংজ্ঞা ঃ দুটা সংখ্যা a আৰু bৰ হৰণফল (quotient) বুলিলে এনে এটা সংখ্যা c বুজায় যাতে

$a=b \times c$, যদিহে c বৰ্তে আৰু c অদ্বিতীয়;

অৰ্থাৎ আমি এনে c এটা পাব লাগিব আৰু এনে c মাথোন এটাহে থাকিব লাগিব।

যেনে, যদি $a \neq o$, আৰু $b=o$ তেন্তে এনে c নাই যাতে $a=o \times c$; অৰ্থাৎ c নবৰ্তে। যদি $a=o$ আৰু $b=o$ তেন্তে $a=o \times c$; গতিকে এনে c অসীম সংখ্যক আছে, অৰ্থাৎ ই অদ্বিতীয় নহয়।

সেয়ে সকলো aৰ ক্ষেত্ৰতেই $\frac{a}{o}$ সংজ্ঞামতে অৰ্থহীন।

গতিকে 0ৰে হৰণ অৰ্থহীন।

লক্ষ্য কৰা— যিহেতু $8=2\times4$ আৰু 4 বৰ্তে গতিকে $8\div2=4$।

একেদৰে $3=2\times\frac{3}{2}$ ৰ পৰা $3\div2=\frac{3}{2}$।

$3\div0$ নবৰ্তে কাৰণ আমি এনে কোনো এটা c সংখ্যা নাপাও যাতে $3=0\times c$।

একেদৰে চোৱাচোন—

$5\times0=0$, $6\times0=0$, $1000\times0=0$। গতিকে $\frac{0}{0}$ অদ্বিতীয় নহয়।

সেয়ে $0\div0$ মানে কি সি সংজ্ঞাৰ বাহিৰত; গতিকে 0ৰে হৰণ বৰ্জনীয়।

নীলাক্ষি ঃ ছাৰ, আমি যদি সংজ্ঞাটো বদলাই দি 0ৰে হৰণ কাৰ্যটো বৈধ কৰি দিলোহেঁতেন তেতিয়া হ'লেও কি অসুবিধা হ'ব?

ছাৰ ঃ তুমি স্বাভাৱিক প্ৰশ্নকে কৰিছা। গণিত বা বিজ্ঞানত আমি সংজ্ঞাবোৰ দি লও কিবা এটা প্ৰয়োজনৰ বাবে। সেই সংজ্ঞাবোৰ তেতিয়ালৈকে বাহাল থাকে যেতিয়ালৈকে আমি কোনো এক অসুবিধাৰ সন্মুখীন নহও। অসুবিধাৰ সন্মুখীন হ'লেই আমি আগৰ সংজ্ঞাবোৰ আকৌ পুণৰাই শুদ্ধ কৰি গৈ থাকো। সাধাৰণ ক্ষেত্ৰতো যদি সেই সংজ্ঞাই একো অসুবিধা সৃষ্টি নকৰে নাইবা সি আমাক বেছি সহায়হে কৰে, তেন্তে আমি তাকেই প্ৰকৃত সংজ্ঞা বুলি গ্ৰহণ কৰো। হৰণৰ সংজ্ঞাটোও সেয়ে সকলো কথা চালিজাৰি চাইহে গ্ৰহণ কৰা হৈছে। বেলেগ ধৰণে সংজ্ঞা দি ল'লে ই আমাক ক'ৰবাত নহয় ক'ৰবাত অসুবিধাত পেলাব। পিছলৈ উচ্চ গণিতত দেখিবা যে শূন্যৰ প্ৰতিক্ৰম অৰ্থাৎ $\frac{1}{0}$ নাই বুলি ধৰি তাক বাদ দি বাকী আটাইবোৰ অশূন্য সংখ্যাৰ প্ৰতিক্ৰমবোৰ ল'লেও আমাৰ কামবোৰ নিয়াৰিকৈ চলি গৈ আছে। বাৰু; ইয়াৰ আগেয়ে আমি কি কথা পাতি আছিলো?

বাপুকণ ঃ ছাৰ, দুটা সংখ্যাক লগ লগোৱা প্ৰক্ৰিয়া কিছুমানৰ কথা।

ছাৰ ঃ এৰা হয়। বাৰু, তোমালোকৰ ঘড়ীবোৰ কিমান ঘণ্টীয়া?

আটায়ে ঃ বাৰ ঘণ্টীয়া ছাৰ।

ছাৰ : ৰেল বা বিমানঘাটিত ঘড়ীবোৰ কিমান ঘণ্টীয়া?

আটায়ে : 24 ঘণ্টীয়া ছাৰ।

ছাৰ : গতিকে ধৰা ৰাজধানী এক্সপ্ৰেছৰ যাত্ৰা ৰেলঘড়ীৰ মতে 17.00 বজা বুলি ক'লে তোমালোকে ৰাজধানীৰ যাত্ৰা সময় কি বুলি ধৰি লৈ যাবা?

নয়ন : ছাৰ আবেলি 5 বজা বুলি ধৰি লম।

ছাৰ : অৰ্থাৎ তুমি 17ৰ পৰা 12 বাদ বাকীখিনিহে ধৰা, নহয় জানো?

নয়ন : হয় ছাৰ।

ছাৰ : ধৰা তোমাৰ ঘড়ীমতে তুমি এদিন ঠিক বাৰ বজাত ঘৰৰ পৰা ওলালা। পাঁচ ঘণ্টা বাচেৰে গৈ পিছত দহ ঘণ্টা ৰেলেৰে গলা, তেন্তে তোমাৰ ঘড়ীয়ে মুঠতে কিমান বজা দেখুৱাব যদি তুমি ক'তো বেলেগে সময় নষ্ট কৰা নাই।

মেঘালী : ছাৰ 5+10=15 ঘণ্টা হ'ব। গতিকে মোৰ ঘড়ীয়ে 15-12=3 বজা দেখুৱাব।

ছাৰ : অৰ্থাৎ তোমাৰ ঘড়ীয়ে এটা যোগ প্ৰক্ৰিয়া দেখুৱায় যে 5 আৰু 10ক যোগ কৰিলে 3 (তিনি) হয়। ই এটা আচৰিত প্ৰক্ৰিয়া হয়নে নহয়?

আটায়ে : হয় ছাৰ।

ছাৰ : বাৰ ঘণ্টীয়া ঘড়ীৰ এই বেলেগ ধৰণৰ যোগ কৰা প্ৰক্ৰিয়াটোক মই ধৰা এনেদৰে লিখিলো

$5 +_{12} 10 = 3$। তেন্তে তোমালোকে বুজি পাবানে?

নিপুকণ : বুজি পাম ছাৰ। পিছে সংখ্যাবোৰ ডাঙৰ হ'লে আমি কিদৰে উলিয়াম।

ছাৰ : পদ্ধতিটো তোমাৰ ঘড়ীটোৰেই কৈ দিব। যিমান যোগ কৰি পালা তাৰ পৰা 12, 12 কৈ যিমান পাৰি বাদ দি যাবা। কাৰণ 12 পাৰ হ'লে ঘড়ীটোৰ আগৰ বাৰখিনি এনেয়ে যায়। বাকী সময়খিনি ল'লেই হ'ল।

গতিকে চোৱা,

$9 +_{12} 8 = 5$ হ'ব। 12 | 17 → 1 - 5 12 | 25 → 2 - 1

তেনেদৰে $11 +_{12} 10 +_{12} 4 = 1$

ঠিক তেনেদৰে 24 ঘণ্টীয়া ঘড়ীতো

$5 +_{24} 23 = 4$ $\qquad$ $5 +_{24} 23 = 28$ $\qquad$ 24 | 38
1 - 14

$7 +_{24} 18 +_{24} 13 = 14$ $\qquad$ 24 | 28
1 - 4

মন কৰিবা যে 12ৰ ঘণ্টীয়া ঘড়ীত

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 আৰু 11

এই সংখ্যাকেইটাহে থাকে। অৰ্থাৎ ইয়াত $12 \equiv 0$। তেনেদৰে 24 ঘণ্টীয়া ঘড়ীত $24 \equiv 0$। এতিয়া মই এটা ঘড়ী বনাইছো চোৱা।

(ছাৰে বেগৰ পৰা এটা নিজে বনোৱা ঘড়ী উলিয়াই দেখুৱালে)।

এইটো 7 ঘণ্টীয়া ঘড়ী।

ইয়াৰ সহায়ত আমি যোগৰ তালিকা এখন বনাম। এই যোগ প্ৰক্ৰিয়াটোক $+_7$ চিনেৰে বুজাম আৰু মাতিম 'যোগ মাপাংক 7' বা ইংৰাজীত 'addition modulo 7' বুলি।

ধৰা আমি 5ৰ লগত 4 ঘড়ী-যোগ কৰিব লাগে। তেন্তে কঁটাডাল 5ৰ পৰা 4 ঘৰ গ'লে ঘড়ীটোৱে 2 দেখুৱাব ; অৰ্থাৎ $5 +_7 4 = 2$।

$+_7$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

তালিকা - 1

বাকী সংখ্যাবোৰো একেদৰে যোগ কৰি এই তালিকাখন বনাইছো; চাই লোৱা। মন কৰা যে এই তালিকাখনে 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 এই সংখ্যাকেইটাৰ ভিতৰতে $+_7$ যোগ প্ৰক্ৰিয়াটো দেখুৱাইছে। নিয়মটো নিশ্চয় বুজি পাইছা। একেদৰে তোমালোকে $+_5$, $+_8$ ৰে দুখন তালিকা বনোৱা।

ময়ুৰ ঃ ছাৰ একে কেইটা সংখ্যাই লম নেকি?

ছাৰ ঃ নহয়; $+_5$ৰ কাৰণে 0ৰ পৰা 4লৈ আৰু $+_8$ৰ কাৰণে 0ৰ পৰা 7লৈ ল'বা। (ছাত্ৰ-ছাত্ৰী আটায়ে তালিকা দুখন বনাই ছাৰক দেখুৱায়)।

ছাৰ ঃ একেদৰে আমি ঘড়ীৰ সংখাবোৰেৰে পূৰণৰ প্ৰক্ৰিয়াও দেখুৱাব পাৰো। যেনে ঘড়ীটোৰে 4 আৰু 5ৰ পূৰণটো পাবলৈ আমি 5বাৰ চাৰি চাৰিকৈ কাটাডাল ঘূৰালে কাটাডালে 6 দেখুৱাব; অৰ্থাৎ 4, 5ৰ ঘড়ী-গুণন 6। এই গুণনটোক $\times_7$ নাম দিলে $4 \times_7 5 = 6$ হ'ব।

$\times_7$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	8	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

তালিকা - 2

ইয়াতো নিয়মটো একে। 4×5ৰ পৰা 7 কেইবাৰ পাৰি বাদ দি ভাগশেষ খিনি ল'লেই হ'ল। এইদৰে কৰিলে তালিকাখন কি হ'ব মোক কৈ থাকা, মই লিখি যাও।

(ল'ৰা-ছোৱালীহঁতে কৈ যায় আৰু ছাৰে ওপৰৰ তালিকাখন লিখি শেষ কৰে)

- তোমালোকে একেদৰে {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}ৰ সংখ্যাবোৰ লৈ $\times_{11}$ তালিকাখন বনাব দিও যদি পাৰিবানে?

আটায়ে ঃ পাৰিম ছাৰ।

ছাৰ ঃ তেন্তে ঘৰতে বনাই লৈ আহিবা।

নীলাক্ষি ঃ ছাৰ, এই প্ৰক্ৰিয়াবোৰ আমাক এনেদৰে তালিকা বনোৱাৰ দৰে ধেমালি কৰিবলৈহে লাগে নে আৰু কিবা বেলেগ কথাৰ কাৰণেও লাগে?

ছাৰ ঃ এতিয়া আমি অকল ধেমালিয়ে নকৰিম, লগতে এই প্ৰক্ৰিয়াবোৰৰ মাজেৰে আমি এখন অচিনাকী অলৌকিক গণিত জগতৰ লগতো পৰিচিত হম। কথাটো এনে ধৰণৰ।

আমি সৰুৰেপৰা সংখ্যাবোৰ পাই আহিছো। সংখ্যাবোৰে সাধাৰণতে কিছুমান ধৰ্ম মানে। যেনে যদি আমি বাস্তৱ সংখ্যা আটাইবোৰ (সংহতি R) লওঁ, তেন্তে

(i) যিকোনো দুটা বাস্তৱ সংখ্যা a,bৰ ক্ষেত্ৰতেই a+b য়ো এটা বাস্তৱ সংখ্যা হ'ব। এই ক্ষেত্ৰত কোৱা হয় যে Rয়ে আমাৰ সাধাৰণ + সংক্ৰিয়াত সংবৰিত। সেইদৰে R য়ে আমাৰ সাধাৰণ – আৰু × সংক্ৰিয়াত সংবৰিত হ'ব। অৱশ্যে শূণ্যক বাদ দি লোৱা R সংহতিটো R_0 হৰণ ÷ প্ৰক্ৰিয়াতো সংবৰিত হ'ব।

কোনো এটা সংহতি Sয়ে যদি কোনো এক সংক্ৰিয়া যেনে oত সংবৰিত, তেন্তে o সংক্ৰিয়া সাপেক্ষে S সংবৰিত, বা Sঅত o সংবৰিত (S is closed under o)।

নিপুকণ ঃ ছাৰা, ধৰা হ'ল S={-1,0,1} আৰু সংক্ৰিয়াটো + ; তেন্তেই সংবৰিত হ'বনে?

+	–1	0	1
–1	–2	–1	0
0	–1	0	1
1	0	1	2

ছাৰা ঃ ইয়াত যিকোনো দুটা Sৰ মৌলৰ ক্ষেত্ৰতেই a+b যোগফলটো Sত থাকিব লাগিব। এই কথাটো সৰু সংহতিৰ ক্ষেত্ৰত মই লিখাৰ দৰে তালিকা এখন বনাই চাব পাৰা। অৱশ্যে ডাঙৰ সংহতিৰ ক্ষেত্ৰত সেই সংহতিটোৰ ধৰ্ম চায়েই গম পোৱা যাব।

এই তালিকাখনে {-1,0,1} সংহতিটোৰ প্ৰত্যেক দুটা মৌলৰে যোগফল দেখুৱাইছে। আনকি -1 আৰু -1ৰো। লক্ষ্য কৰা যে তালিকাখনত Sৰ

মৌলৰ বাহিৰেও কিছুমান বিদেশী মৌল আছে। যেনে -2,2; অৰ্থাৎ কোনোবা এনে দুটা মৌল আছে যাৰ যোগফলটো Sত নাই। গতিকে ইয়াত + সাপেক্ষে S সংবৰিত নহয়। একেদৰে নিয়ন, তুমি কোৱা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি Nয়ে বিয়োগ (-) সাপেক্ষে সংবৰিত হ'বনে?

নিপুকণ ঃ নহয় ছাৰ; কাৰণ 3-5= -2 সংখ্যাটো Nত নাই।

ছাৰ ঃ বেছ। এতিয়া বোৰ্ডলৈ চাই কোৱা।

$S=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ সংহতিটো $+_7$ আৰু $\times_7$ সংক্ৰিয়া দুয়োটাতে সংবৰিত হ'বনে?

নীলিমা ঃ হ'ব ছাৰ। কাৰণ তালিকা দুয়োখনৰে ভিতৰত কোনো বিদেশী মৌল নাই। প্ৰত্যেক দুটা মৌল $a,b \in S$ৰ ক্ষেত্ৰতেই $a +_7 b$ আৰু $a \times_7 b$ত Sত আছেই।

ছাৰ ঃ বঢ়িয়া। এতিয়া মেঘালী কোৱা। এই S সংহতিটোৰ পৰা যিকোনো তিনিটা মৌল (অৱশ্যে একে হ'বও পাৰে) a, b, c ল'লেই $+_7$ৰ সাপেক্ষে $a+_7(b +_7 c) = (a+_7 b) +_7 c$ হ'বনে?

মেঘালী ঃ পটক্কৈ ক'ব নোৱাৰিম ছাৰ। কৰি চাব লাগিব।

ছাৰ ঃ কিমান কৰিবা?

নীলাক্ষি ঃ হ'ব ছাৰ। কাৰণ আগৰ সংবৰণ ধৰ্মমতে $b+_7 c \in S$;

গতিকে $a+_7(b+_7 c) \in S$।

সেইদৰে সোঁহাতৰ ৰাশিটোও Sত আছে।

ছাৰ ঃ কিন্তু সেইটোৱে নুবুজায় যে দুয়োপক্ষ সমান।

নীলাক্ষি ঃ ও, হয় ছাৰ। মোৰ ভুল হৈছে। হ'লেও তালিকা চাই সহজতে কৰিব পাৰিম; যেনে, $3+_7(4 +_7 1) = 3 +_7 5 = 1$

আকৌ $(3 +_7 4) +_7 1 = 0 +_7 1 = 1$। এইদৰে a, b, c এই যিকোনো তিনিটা সংখ্যা Sৰ পৰা ল'লেই দুয়োপক্ষ সমান হ'ব।

ছাৰ ঃ তুমি ঠিকেই কৈছা। সেইদৰে যিকোনো তিনিটা $a, b, c \in S$ৰ ক্ষেত্ৰতেই $a \times_7(b \times_7 c) = (a \times_7 b)\times_7 c$ হ'ব।

কৰি চাব পাৰিবা। কোনো সংহতি Sৰ ওপৰত এটা সংক্ৰিয়াৰ এই ধৰ্মটোক সম্মিলন বিধি (associative law) বোলে।

নিয়ন ঃ ছাৰ, এনেকুৱা ধৰ্ম সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰত আমি আগতেই পাই আহিছো।

ছাৰ ঃ হয়, কিন্তু বিভিন্ন প্ৰক্ৰিয়া যেনে $+_7$, $\times_7$ আদি আৰু বিভিন্ন সংহতিৰ ক্ষেত্ৰত কথাবোৰ চালি জাৰি চালেহে বেছিকৈ বুজা যাব। উদাহৰণস্বৰূপে Rৰ ক্ষেত্ৰত তোমালোকে জানা যে সাধাৰণ +, আৰু পূৰণ প্ৰক্ৰিয়া দুটা ক্ৰম বিনিমেয় (commutative), অৰ্থাৎ প্ৰত্যেক দুটা a, bৰ

ক্ষেত্ৰত $a + b = b + a$

আৰু $a \times b = b \times a$

কিন্তু তুমিয়েই কোৱাচোন, আমাৰ বোৰ্ডত থকা সেই S সংহতিটোৰ ক্ষেত্ৰত $+_7$ আৰু $\times_7$ সংক্ৰিয়া দুটাই এই ধৰ্ম মানিবনে?

নিয়ন ঃ মানিব ছাৰ। যেনে $5 +_7 4 = 2 = 4 +_7 5$, $3 \times_7 6 = 4 = 6 \times_7 3$। তেনেদৰে আটাইবোৰ চাব পাৰি।

ছাৰ ঃ এতিয়া আকৌ দুয়োখন তালিকাৰ পৰা তোমালোকে বিতৰণ বিধি (distributive law) অৰ্থাৎ $a \times_7 (b +_7 c) = (a \times_7 b +_7 (a \times_7 c)$ হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰি পাবা যে $\times_7$ সংক্ৰিয়াটোৱে $+_7$ৰ ওপৰত বিতৰণ বিধি মানে।

মেঘালী ঃ এনে নিয়ম নমনা উদাহৰণ জানো ক'ৰবাত আছে?

ছাৰ ঃ অজস্ৰ আছে। স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতিত + প্ৰক্ৰিয়াটোৱে পূৰণৰ ওপৰত বিতৰণ বিধি নামানে, যেনে

$2+(3 \times 5) = 17$, কিন্তু $(2+3) \times (2+5) = 35$

গতিকে

$2+(3 \times 5) \neq (2+3) \times (2+5)$।

সেইদৰে দুটামান বেলেগ বেলেগ সংখ্যা ওপৰৰ S সংহতিৰ পৰা ধৰি পৰীক্ষা কৰি চোৱা যে সকলো ক্ষেত্ৰতে

$a +_7 (b \times_7 c) \neq (a +_7 b) \times_7 (a +_7 c)$

নিপুকণ ঃ হয় ছাৰ, আমি চালোয়েই,

$3 +_7 (2 \times_7 4) = 3 +_7 1 = 4$

কিন্তু $(3 +_7 2) \times_7 (3 +_7 4) = 5 \times_7 0 = 0$

গতিকে $+_7$ প্ৰক্ৰিয়াটোৱে $\times_7$ৰ ওপৰত বিতৰণ বিধি নামানে।

ছাৰ : বঢ়িয়া। এতিয়া মই এটা সংহতিৰ ভিতৰত থাকিব পৰা এটা বিশেষ মৌলৰ কথা পাতিম। যেনে স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি Nটো লোৱা, আৰু এটা প্ৰক্ৰিয়া যেনে $\times$ (পূৰণ) লোৱা। দেখিবা যে Nত এনে এটা মৌল 1 আছে যাতে যিকোনো মৌল x ল'লেই $x \times 1 = x$ হ'বই।

যেনে $4 \times 1 = 4$, $100 \times 1 = 100$। অৰ্থাৎ Nৰ এই 1 মৌলটো এনেকুৱা যাতে ই পূৰণৰ প্ৰক্ৰিয়াত Nৰ প্ৰত্যেকটো মৌলকে একে ৰাখে।

সেইদৰে অখণ্ড সংখ্যা Zৰ ভিতৰত এনে এটা মৌল 0 আছে যাতে Zৰ যিকোনো এটা মৌল xৰ ক্ষেত্ৰতেই $x + 0 = x$ হ'ব।

অৰ্থাৎ + প্ৰক্ৰিয়াত 0য়ে আটাইবোৰ মোলকে একে ৰাখে। এনে মৌল কিন্তু সংহতিটোত আৰু দ্বিতীয় এটা নাই। এনে মৌলবোৰকে একক (unity) মৌল বোলে। আমি কম যে—

N সংহতিত পূৰণ প্ৰক্ৰিয়া সাপেক্ষে 1 একক মৌল।

Z সংহতিত যোগ প্ৰক্ৰিয়া সাপেক্ষে 0 একক মৌল।

মেঘালী : ছাৰ, যোগ (+) সাপেক্ষে Nত একক মৌলটো কি?

ছাৰ : নীলাক্ষি, তুমি চোৱা।

নীলাক্ষি : ছাৰ, + সাপেক্ষে Nত কোনো একক মৌল নাই। আচলতে যিকোনো স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ লগত 0 যোগ কৰিলেহে একে থাকিব; কিন্তু 0টো স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি Nৰ ভিতৰত নাই।

ছাৰ : বঢ়িয়া উত্তৰ। এতিয়া তোমালোকে চোৱা,

$+_7$ সংক্ৰিয়াত S সংহতিটোৰ একক মৌল কি? আৰু

$\times_7$ সংক্ৰিয়াত S সংহতিবোৰ একক মৌল কি?

অংকিত : ছাৰ, তালিক-1ৰ প্ৰথম স্তম্ভই নাইবা প্ৰথম শাৰীয়ে দেখুৱাইছে যে Sৰ যিকোনো সংখ্যাৰ লগত 0 যোগ কৰিলে সংখ্যাটো একেই থাকে। একেদৰে তালিকা-2ৰ পৰাও পাম যে যিকোনো সংখ্যাৰ লগত 1 পূৰণ কৰিলে সংখ্যাটো একেই থাকে। গতিকে $+_7$ (যোগ মাপাংক 7) সাপেক্ষে ইয়াত একক্ষ মৌল 0 আৰু $\times_7$ (পূৰণ 7) সাপেক্ষে ইয়াত একক মৌল 1 হ'ব।

ছাৰ ঃ অতি সুন্দৰ। এইবাৰ আমি একক মৌলৰ ওপৰত ভিত্তি কৰি এটা সংহতিৰ বাকী মৌলবোৰৰ এবিধ গুণৰ কথা আলোচনা কৰিম।

তোমালোকে সংখ্যাৰ প্ৰতিক্ৰম (reciprocal) কাক বোলে জানা। যেনে পূৰণৰ ক্ষেত্ৰত 2ৰ প্ৰতিক্ৰম $\frac{1}{2}$, -3ৰ প্ৰতিক্ৰম $\frac{1}{-3}$, $\frac{2}{3}$ৰ প্ৰতিক্ৰম $\frac{3}{2}$ ইত্যাদি। এইবোৰ পূৰণৰ প্ৰতিক্ৰম বোলাৰ কাৰণ কি জানানে?

নিপুকণ ঃ জানো ছাৰ। পূৰণ প্ৰক্ৰিয়াত যিকোনো অশূন্য বাস্তৱ সংখ্যা aৰ প্ৰতিক্ৰম হ'ব $\frac{1}{a}$; ইয়াৰ কাৰণ $a \times \frac{1}{a} = 1$

ছাৰ ঃ এই 1 মানে কি, তাক তোমালোকে এতিয়ালৈকে বোধহয় জনা নাই। পূৰণৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰতিক্ৰম পাবলৈ যিটো 1 লাগে সি হ'ল পূৰণৰ এককটো। সেইদৰে R সংহতিত যোগৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰত্যেক সংখ্যা xৰ প্ৰতিক্ৰম হ'ব -x কাৰণ, $x + (-x) = 0$; অৰ্থাৎ Rত যোগৰ একক।

যিকোনো প্ৰক্ৰিয়া সাপেক্ষে আমি এটা সংখ্যা xৰ প্ৰতিক্ৰমটোক সকলোৰে বাবে বিপৰীত (inverse) বুলিয়েই কম। xৰ বিপৰীতক সদায়ে x^{-1} প্ৰতীকেৰে বুজোৱা হয়। যেনে ওপৰত $2^{-1} = \frac{1}{2}$ বা $x^{-1} = -x$ ।

এতিয়া তোমালোকে তালিকা 1ৰ পৰা $+_7$ সাপেক্ষে প্ৰত্যেক সংখ্যাৰে বিপৰীত মৌলটো বাচি কোৰা।

নীলিমা ঃ ছাৰ, মই কও। তালিকা 1ত $+_7$ সাপেক্ষে একক হ'ল 0। গতিকে $0^{-1} = 0$ কাৰণ $0 +_7 0 = 0$; $1^{-1} = 6$ কাৰণ $1 +_7 6 = 0$। সেইদৰে $2^{-1} = 5$, $3^{-1} = 4$, $4^{-1} = 3$, $5^{-1} = 2$ আৰু $6^{-1} = 1$

ছাৰ ঃ আটাইবোৰ শুদ্ধ। ইয়াত এটা কথা মন কৰিছানে যে 1ৰ বিপৰীত 6 হ'লে 6ৰ বিপৰীতো 1 হয়। অৰ্থাৎ $a^{-1} = b$ হ'লে $b^{-1} = a$ হয়। এতিয়া তালিকা 2ৰ পৰা বিপৰীতবোৰ এজনে কোৰা।

মেঘালী ঃ ছাৰ, মই চেষ্টা কৰি চাও। $\times_7$ সাপেক্ষে তালিকা 2ত একক মৌল হ'ল 1। ইয়াত 1ৰ বিপৰীত অৰ্থাৎ $1^{-1} = 1$; $2^{-1} = 4$; আকৌ $4^{-1} = 2$; $3^{-1} = 5$, যিহেতু $3 \times_7 5 = 1$; আকৌ $5^{-1} = 3$ । ইয়াত কিন্তু ছাৰ 6ৰ বিপৰীত 6 নিজেই, কাৰণ $6 \times_7 6 = 1$ ।

ছাৰ ঃ ভাল কথা; কিন্তু তুমি 0ৰ বিপৰীতটো বাদ দিলা যে?

মেঘালী ঃ ছাৰ; 0ৰ শাৰীত 1 নায়েই; গতিকে 0ৰ লগত কাকো x_7 কৰিলে 1 পোৱা নাযাব। সেয়ে বোধহয় 0ৰ বিপৰীত নাই।

ছাৰ ঃ তুমি বঢ়িয়া উত্তৰকে দিছা। গতিকে আমি বুজিলো যে এটা সংহতিত, যেনে Sত প্রত্যেক মৌলৰে বিপৰীত মৌল নাথাকিবও পাৰে। আমাৰ এই $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ সংহতিটোৰ $\times_7$ সংক্রিয়াৰ অধীনত 0ৰ বাহিৰে আটাইবোৰ মৌলৰে বিপৰীত মৌল আছে। তোমালোকক মই দুটা আৰু ঘৰৰ কাম দিলো। $+_6$ আৰু $\times_6$ ৰ অধীনত দুখন তালিকা প্রস্তুত কৰি তালিকাৰ সহায়ত পৰীক্ষা কৰি চাবা যে ওপৰৰ আটাইবোৰ ধৰ্ম S সংহতিটোত প্রক্রিয়াবোৰে মানেনে নাই।

আটায়ে ঃ ভাল ছাৰ, আমি কৰি আনিম।

নিপুকণ ঃ ছাৰ, ওপৰৰ্ব আটাইবোৰ ধর্ম আমি এতিয়ালৈ সংখ্যাৰ সংহতিৰ ওপৰতে আলোচনা কৰি আহিছো, যদিও ইয়াত সাধাৰণ যোগ বিয়োগৰ বাহিৰেও কিছুমান অচিনাকী সংক্রিয়াৰ কথাও আপুনি আমাক ক'লে। কিন্তু ছাৰ, সংখ্যাৰ বাহিৰেও এনে সংহতি আছে নেকি যিবোৰেও কোনোবা সংক্রিয়াৰ অধীনত এই ধর্মবোৰ মানে?

ছাৰ ঃ তোমাৰ প্রশ্নটো উন্নত মানৰ। প্রকৃততে সংক্রিয়াৰ অর্থ কোনো সংহতিৰ যিকোনো দুটা মৌলক লগ লগোৱা এটা উপায় যিয়ে মৌল দুটাক লগ লগাই পোৱা মৌলটোক দেখুৱাই দিয়ে। ইয়াক আমি কোনো নিয়মেৰে বর্ণোৱাৰ উপৰি বিশেষ ধৰণে সংজ্ঞা দিও ল'ব পাৰো। যেনে ধৰা $A=\{a,b,c\}$ এটা সংহতি, সংখ্যাৰ নহবও পাৰে। Aৰ ওপৰত 0 এটা সংক্রিয়া যাতে এই সংক্রিয়াটোৱে Aৰ যিকোনো দুটা মৌলক মই বোৰ্ডত লিখি দিয়াৰ দৰে এনেদৰে লগ লগায়;

$a \circ a = b$; $a \circ b = a$ আৰু

$a \circ c = b$ ইত্যাদি।

o	a	b	c
a	b	a	b
b	a	c	c
c	b	a	a

নীলিমা ঃ ছাৰ; তালিকাত আপুনি যেনিতেনি কিবা একোটা লিখিছে নে বিশেষ কিবা এটা নিয়মত লিখিছে?

ছাৰ : হয়, মই নিজৰ ইচ্ছামতে যেনিতেনি লিখি লৈছো। এতিয়া এইদৰে সংজ্ঞা দি লোৱা 0 প্ৰক্ৰিয়াই কি নিয়ম মানে আমি এতিয়াহে চাম।

তালিকাৰ পৰা চোৱা যে 0 সংক্ৰিয়াটো সংবৰিত (closed), কাৰণ যিকোনো দুটা মৌলৰ মিলন A সংহতিৰে এটা মৌল।

কিন্তু 0 সন্মিলন (associative) বা বিনিময় (commutative) ধৰ্ম নামানে কিয়নো ইয়াত যিকোনো মৌল x, y, zৰ ক্ষেত্ৰতেই সদায়েই

xoy = yox নাইবা (x o y) oz = xo(yoz) নহয়।

যেনে boc $\neq$ cob আৰু co(aob) $\neq$ (coa)ob

তাৰোপৰি ইয়াত কোনো একক মৌল নাই, কাৰণ Aত এনে কোনো মৌল x নাই যাতে Aৰ প্ৰতিটো মৌল xoy = yৰ ক্ষেত্ৰতেই yox = y আৰু yox = y।

নীলাক্ষি : ছাৰ, ইয়াৰ অৰ্থ এইটো নেকি যে তালাকাখনৰ কোনোবা এটা শাৰী ওপৰৰ শাৰী অৰ্থাৎ a, b, cৰ সৈতে একে।

ছাৰ : একেবাৰেই ঠিক। একক মৌলৰ বিপৰীতে থকা শাৰীটো ওপৰৰ লগত মিলিব। এতিয়া কোৱাচোন বাৰু, 0 প্ৰক্ৰিয়াত প্ৰতি মৌলৰে বিপৰীত (inverse) মৌল থাকিবনে?

নীলিমা : ছাৰ, যদি একক মৌলেই নাই তেন্তে বিপৰীত মৌল কিদৰে বৰ্তিব?

ছাৰ : অতি সুন্দৰ উত্তৰ। কাৰণ কোনো সংহতি Aৰ এটা মৌল xৰ বিপৰীত মৌল বুলিলে Aত থকা এনে এটা মৌল y বুজায় যাতে xoy = একক।

নিপুকণ : ছাৰ, সংখ্যা সংহতিত একক মৌল, বিপৰীত মৌল এনে কথাবোৰ থাকিবনে?

ছাৰ : এনে কথাবোৰ থাকিব বা নিৰ্ভৰ কৰিব তুমি কি সংখ্যা লোৱা আৰু সেই সংহতিৰ বাবে কি সংক্ৰিয়া বাচা। উদাহৰণস্বৰূপে যদি অখণ্ড সংখ্যাবোৰৰ সংহতি Z ধৰা আৰু যদি সংক্ৰিয়া সাধাৰণ যোগ (+) ধৰা, তেন্তে ইয়াৰ একক 0 (শূন্য) আৰু প্ৰতিটো অখণ্ড সংখ্যা pৰ বিপৰীত মৌল –p হ'ব; যেনে 2ৰ বিপৰীত '–2' আৰু –7ৰ বিপৰীত -(-7) অৰ্থাৎ 7।

অংকিত ঃ ছাৰ একক 0ৰ বিপৰীত আছেনে নাই?

ছাৰ ঃ মেঘালী, তুমিয়েই কোৱাচোন!।

মেঘালী ঃ ছাৰ; যিকোনো সংহতিতে একক মৌলৰ বিপৰীত এককেই হ'ব। ইয়াত 0ৰ বিপৰীত 0, কাৰণ $0 + 0 =$ একক 0।

ছাৰ ঃ তেন্তে এতিয়া তোমালোকে কোৱা Z সংহতিটোত পূৰণ (×) সংক্ৰিয়াত একক মৌল আৰু প্ৰতি মৌলৰে বিপৰীত মৌল থাকিবনে?

মেঘালী ঃ পূৰণ প্ৰক্ৰিয়াত Zত একক 1 ; কিন্তু ইয়াত 1 আৰু 0ৰ বাহিৰে অইন কোনো সংখ্যাৰে বিপৰীত মৌল নাই; কাৰণ এটা অখণ্ড সংখ্যা pৰ বিপৰীত হ'ব লাগিব $\frac{1}{p}$ যিটো Z সংহতিত নাথাকে।

ছাৰ ঃ এও ঠিকেই বুজিছে। তেনেদৰে পৰিমেয় বা বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতিতো পূৰণ সংক্ৰিয়াত 0ৰ বিপৰীত মৌল নাই; অৱশ্যে 0ৰ বাহিৰে বাকী সকলো সংখ্যাৰে বিপৰীত মৌল সেই সংহতিতে থাকিব।

প্ৰবাল ঃ ছাৰ, আমি জানো যে আমি পোৱা সাধাৰণ সংখ্যা সংহতি আটাইবোৰেই অসীম। আমি কিদৰে জানিম যে, প্ৰতি মৌলৰ ক্ষেত্ৰতেই একোটা প্ৰক্ৰিয়াই ওপৰৰ ধৰ্মবোৰ মানে?

ছাৰ ঃ তুমি এটা সুন্দৰ প্ৰশ্ন কৰিছা। বাস্তৱ সংখ্যাৰ ধৰ্মই এই কথাবোৰ ঠিক কৰিব। অৱশ্যে এটা কথা; বাস্তৱ সংখ্যাৰ ধৰ্মবোৰ হয় পৰীক্ষা, নহয় প্ৰমাণ, নাইবা কিছুমান স্বতঃসিদ্ধভিত্তিক যুক্তিৰ ওপৰত ভিত্তি কৰি প্ৰতিষ্ঠা কৰা হৈছে। যেনে N এটা যিকোনো যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হ'লে N+1য়ো এটা যোগাত্মক অখণ্ড হ'ব। m আৰু n যিকোনো দুটা পৰিমেয় সংখ্যা হ'লে m+n আৰু $m \times n$য়ো একোটা পৰিমেয় হ'ব আৰু $m \times n$ সদায়েই $n \times m$ পৰিমেয়ৰ সমান হ'ব, ইত্যাদি। এই ধৰ্মবোৰৰ ওপৰত ভিত্তি কৰিয়েই অসীম সংখ্যা সংহতিত সংবৰণ, সন্মিলন, একক, বিপৰীত, ক্ৰম বিনিময়, বিতৰণ আদি বিধিবোৰ বিচাৰ কৰি চোৱা হয়।

নিপূকণ ঃ ছাৰ, এনেকুৱা সসীম সংহতি আছে নেকি য'ত এই আটাইবোৰ ধৰ্মই সিদ্ধ হয়?

ছাৰ ঃ অজস্ৰ আছে। অৱশ্যে এই সংহতিবোৰত ওপৰৰ ধৰ্মবোৰ পৰীক্ষা কৰোঁতে সসীমতাৰ কথা ভাবি চাই নিৰ্দিষ্ট বিধিৰ উপৰি আৰু কিছুমান সতৰ্কতা অৱলম্বন কৰিবলগীয়া হয়। তলত আমি দুটামান উদাহৰণৰ পৰা এই কথাবোৰ লক্ষ্য কৰিম।

নীলিমা ঃ ছাৰ, আমি আগতে পোৱা যোগ মাপাংক, পূৰণ মাপাংক আদি উদাহৰণবোৰত সংখ্যা সংহতিবোৰ সসীম আছিল আৰু তাত এইবোৰ সংক্ৰিয়া সাপেক্ষে বিধিবোৰ পৰীক্ষা কৰিছিলো। তাত আমি কি উপৰুৱা সতৰ্কতা ল'ব লগা হৈছিল?

ছাৰ ঃ লক্ষ্য কৰিবা যে অসীম সংহতিৰ ক্ষেত্ৰত আমাৰ বিধিবোৰেই যথেষ্ট আছিল, কিন্তু সসীমৰ ক্ষেত্ৰত আমি প্ৰতিটো বা প্ৰতিযোৰ মৌলকে পৰীক্ষা কৰিবৰ বাবে একোখন গুণণ তালিকা বনাবলগীয়া হয়, নাইবা মৌলবোৰক সুকীয়াকৈ সংক্ৰিয়া গুণনত পৰীক্ষা কৰিবলগীয়া হয়। আমি আৰু কেইটামান বেলেগ বেলেগ আৰ্হিৰ উদাহৰণ এতিয়া আলোচনা কৰো আহা।

1] ধৰা আমি কিছুমান সংখ্যাৰ ত্ৰয় (△, ○, □) ল'লো যাতে ইয়াৰ বাকচবোৰত হয় 0 নাইবা 1 হে বহিব পাৰে। তেন্তে এনেকুৱা আটাইবোৰ সম্ভৱপৰ ত্ৰয় হ'ব পাৰে এনে—

(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1) আৰু (1, 1, 1) এই মুঠ আঠোটা।

ধৰা এই মৌলবোৰৰ সংহতিটোত আমি এটা সংক্ৰিয়া + (ইয়াক 'যোগ' বুলিম) এনেদৰে ল'লো যাতে যিকোনো দুটা মৌলৰ যোগক এইদৰে সংজ্ঞা দিয়া হয়, যেনে—

(a, b, c) + (x, y, z)) = (a + x, (b + y, c + z)।

এই যোগটো আমি আগতে পোৱা তিনি বিমীয় ভেক্টৰৰ যোগৰ সদৃশ। তাৰোপৰি এনে কৰোঁতে যদি একে স্থানাংকত থকা দুটা মৌলৰ যোগত 1+1=2 হয় তেন্তে আমি ধৰিম যে 1+1=0, অৰ্থাৎ যোগ মাপাংক 1 গতিকে (0, 1, 0),+ (0, 1, 1) = (0, 0, 1)

আৰু (0,1,1),+(1,1,1),= (1,0,0,), হ'ব।

+	(0,0,0)	(0,0,1)	(0,1,0)	(1,0,0)	(1,0,1)	(1,1,0)	(0,1,1)	(1,1,1)
(0,0,0)								
(0,0,1)								
(0,1,0)								
(1,0,0)								
(1,0,1)								
(1,1,0)								
(0,1,1)								
(1,1,1)								

এতিয়া তোমালোকে মই বোৰ্ডত অঁকা তালিকাখন সম্পূৰ্ণ কৰা। পৰিবানে?

আটায়ে ঃ পাৰিম ছাৰ।

(আটায়ে ৰংমনে কৰিবলৈ লাগি গ'ল। অলপ দেৰি পিছত)

ছাৰ ঃ প্ৰবাল, নীলিমা! যোগবোৰ কৰি কেনে লাগিছে?

প্ৰবাল ঃ ভাল লাগিছে ছাৰ।

নীলিমা ঃ ছাৰ, কিবা নতুন খেল খেলাৰ নিচিনা লাগিছে।

ছাৰ ঃ ভাল কথা। এতিয়া তালিকাখন পূৰ হ'ল যদি মই বোৰ্ডত লিখা এই কথাখিনি পৰীক্ষা কৰি চোৱা

i) যিকোনো দুটা ত্ৰয়ৰ যোগফোল এই একেটা সংহতিৰে এটা ত্ৰয়, অৰ্থাৎ +য়ে সংবৰণ বিধি থাকে। তেনেদৰে চোৱা

ii) সম্মিলন বিধি, অৰ্থাৎ $a + (b + c) = (a + b) + c$

iii) একক বিধি

iv) বিপৰীত বিধি

v) বিনিময় বিধি, আৰু

vi) বিতৰণ বিধি।

এই আটাইকেইটা পৰীক্ষা কৰোঁতে তোমালোকৰ ইয়াত যথেষ্ঠ সময় লাগিব পাৰে। সেয়েহে দুই এটা কৰি বাকীবোৰ ঘৰত কৰি চাবা।

নীলিমা ঃ ছাৰ, উদাহৰণটো বৰ সুন্দৰ। কিন্তু ছাৰ, এনে উদাহৰণবোৰৰ বাৰু কৰবাত কিবা কাৰণত লাগে নেকি?

ছাৰ ঃ ওপৰৰ বিধিৰ কিছুমান নাইবা আটাইবোৰকে সিদ্ধ কৰা বিশেষ সংক্ৰিয়াৰে বিদ্যুতীন বৰ্তনী আজিকালি তথ্য-প্ৰযুক্তিত ব্যৱহাৰ কৰা হয়। তোমালোকে এইদৰে বিধি কিছুমান পৰীক্ষা কৰিবলৈ মই আৰু দুটামান উদাহৰণ দিছো। প্ৰথমটো 0 আৰু 1 ৰে বনোৱা মেট্ৰিক্স কিছুমানৰ সংহতি এটা আৰু সংক্ৰিয়াটো হ'ল মেট্ৰিক্সৰ গুণন। অৱশ্যে গুণগত যদি 1+1 পোৱা, তেন্তে আগৰ দৰে $2 \equiv 0$ ধৰিবা। এতিয়া লোৱা (ছাৰে বোৰ্ডত লিখি দিয়ে)।

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

প্ৰথমে ইয়াত {I, J, K} মৌল তিনিটাৰ সংহতিটো লৈ আগৰ দৰে তালিকা এখন বনোৱা আৰু বিধিবোৰ পৰীক্ষা কৰা।

(ছাত্ৰ-ছাত্ৰীইঁতে কৰি যায়। অলপ দেৰি পিছত ছাৰে নিজে তালিকাখন বনায় আৰু সোধে)।

ছাৰ ঃ কোনকেইটা বিধি মানিছে, এতিয়া তালিকাৰ পৰা লক্ষ্য কৰা। দেখদেখকৈ সংবৰণ মানিছে। সন্মিলন মানিছেনে?

•	I	J	K
I	I	J	K
J	J	K	I
K	K	I	J

নিপুকণ ঃ মানিছে ছাৰ।

ছাৰ ঃ মানিবই। এটা কাৰণ যে প্ৰকৃততে একে বৰ্গ মেট্ৰিক্সৰ গুণনে সদায় সংবৰণ সন্মিলন, একক, বিতৰণ আদি বিধিবোৰ মানে। অৱশ্যে ইয়াত বিনিময় বিধিও মানিছে; কাৰণ তালিকাৰ পৰা JK=KJ, IJ=JI ইত্যাদি। বিনিময় বিধি মনা উদাহৰণবোৰত মন কৰিবা যে ইয়াৰ তালিকাবোৰ মুখ্য কৰ্ণত সমমিতি (Symmetrucal)। এতিয়া তোমালোকক দ্বিতীয় ঘৰৰ কাম দিলো— ওপৰৰ গোটেইটো সংহতি, অৰ্থাৎ

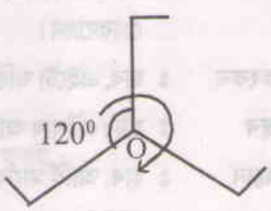
{I, J, K, L, M, N}ৰ ক্ষেত্ৰত এনে গুণন তালিকা বনাই বিধিবোৰ পৰীক্ষা কৰি চাবা।

সৰুকণ : ছাৰ, ওপৰৰ উদাহৰণবোৰ যদিও সংখ্যাৰ সংহতিৰ ওপৰত নহয়, তথাপিও আপুনি এই সংহতিৰ মৌলবোৰ সংখ্যাৰে সজাইছে; যেনে সদিশ বা তিনিবিমীয় মৌলবোৰ (a, b, c) নাইবা মেট্ৰিক্সৰ মৌলবোৰ। ছাৰ, একেবাৰে সংখ্যা ব্যৱহাৰ নকৰাকৈ সসীম বা এনে অসীম মৌলৰ সংহতিৰ উদাহৰণ আছে নেকি যাতে কোনো সংক্ৰিয়াৰে সংহতিত এই বিধিবোৰ সিদ্ধ হয়?

ছাৰ : তুমি দেখিছো মোৰ যেন পৰীক্ষা ল'বলৈহে বিচাৰিছা। যিয়েই নহওক তোমাৰ প্ৰশ্নটো শুনি মোৰ গৌৰৱ উপজিছে। মই কওঁ শুনা। পুৰণি গ্ৰীকসকলৰ দিনৰ পৰাই অজানিতে কিছুমান বিমূৰ্ত ধাৰণাৰ উদ্ভৱ হৈছিল। সুষম আকৃতিৰ চিত্ৰ, বস্তুৰ প্ৰতিসমভাৱে হোৱা চলন, স্থানান্তৰ, ঘূৰ্ণন আদি ৰূপান্তৰ প্ৰক্ৰিয়াৰ ওপৰত তেওঁলোকে নজৰ দিছিল।

জ্যামিতিক চিত্ৰ বা বস্তু কিছুমানৰ প্ৰতিসমতা ধৰ্মৰ ওপৰত ভিত্তি কৰি বৈমূৰ্তিক আৰ্হি কিছুমান সজোৱাটো অতীজ কালৰে পৰাই এটা আমোদজনক অভ্যাসত পৰিণত হৈ আহিছে। এনেকুৱা আৰ্হিৰ মৌলবোৰ হ'ল 'চিত্ৰৰ বিভিন্ন ৰূপান্তৰ', যি ৰূপান্তৰৰ সহায়ত চিত্ৰই নিজৰ ওপৰতে মানচিত্ৰিত (map) হ'ব পাৰে। এনে আচ্ছাদক (নিজৰ ওপৰতে মিলি যোৱা চিত্ৰন) ৰূপান্তৰে মানি চলা এটা ঘাই সত্যতা হ'ল যে ইহঁত সদায় সন্মিলিত। এনে আৰ্হি গঠন কৰা ৰূপান্তৰবোৰৰ এই সংহতিটো অৱশ্যে সসীম, অসীম দুয়োবিধেই হ'ব পাৰে। কথাটো এইদৰে বুজিবলৈ তোমালোকে নিশ্চয় অসুবিধা পাইছা। মই দুটামান উদাহৰণ দিছো। (বুলি ছাৰে বোৰ্ডত এটা চিত্ৰ আঁকে)।

1. সমত্ৰিবাহু চিত্ৰৰ ৰূপান্তৰ ঃ
(Symmetries of the triquetra)



ধৰা চিত্ৰটোৰ O বিন্দুৰ মাজেৰে ঘড়ীৰ কটাৰ দিশত 120^0 ঘূৰ্ণন প্ৰক্ৰিয়া এটাক আমি নাম দিলো R। তেন্তে Ro R, Ro

Ro Ro য়ে ক্রমে 240^0 আৰু 360^0 ঘূৰ্ণন বুজাব। কিন্তু Ro Ro R অৰ্থাৎ R^3 য়ে তিনিটা ঘূৰ্ণন প্ৰক্ৰিয়া কৰা বুজাব আৰু ইয়াত $R^3 = 1$, অৰ্থাৎ তৎসমক বা মূল অৱস্থান বুজাব।

গতিকে ইয়াত $R^4=R$, $R^5=R^2$ ইত্যাদি পোৱা যাব।

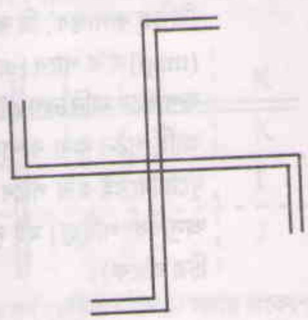
আগৰ দৰে এতিয়া বিভিন্ন মৌলবোৰ লৈ অৰ্থাৎ $P = \{I, R, R^2\}$ সংহতিটো লৈ আৰু সোপাকে 120^0 ঘূৰ্ণন প্ৰক্ৰিয়াটোক 'o' সংক্ৰিয়া বুলি ধৰিলে আমি তালিকা এখন এইদৰে পাম।

•	I	R	R^2
I	I	R	R^2
R	R	R^2	I
R^2	R^2	I	R

(ছাৰে তালিকাখন বোৰ্ডত লিখি দিয়ে)।

প্ৰবাল : ছাৰ, আপুনি ইয়াত R^4, R^5, R^6 আদি মৌলবোৰ কিয় ধৰা নাই?

ছাৰ : আমি ইয়াত স্পষ্ট (distinict) বা ভিন্ন মৌলবোৰহে লৈছো। R^4, R^7, R^{10} আদি মৌলবোৰ Rৰ সমান, কাৰণ ইহঁতে চিত্ৰটো একে স্থানতে ৰাখিব; তেনেদৰে R^5, R^8, আদি R^2ৰ সমান আৰু R^3, R^6, আদি I অৰ্থাৎ তৎসমক মৌলহে।



এতিয়া তোমালোকে Pক 'o' সংক্ৰিয়াৰ অধীনত বিধিবোৰ পৰীক্ষা কৰি চাবা।

তলৰ চিত্ৰটোক 90^0 কৈ ঘুৰোৱা প্ৰক্ৰিয়াৰে কেইটা মৌল পাবা ভাবি চোৱাচোন।

কংকন : ছাৰ, এইটো স্বস্তিকা নহয় জানো?

ছাৰ : হয়। এইবাৰ আমি স্বস্তিকাৰ ৰূপান্তৰেৰে আৰ্হি চাম।

ৰঞ্জন : ছাৰ, আৰ্হি মানে কি? মডেলবোৰ নহয় জানো?

ছাৰ : আমি ইয়াত গানিতিক ভাবে আৰ্হি মানে কিছুমান বিশেষ মৌলৰ যেনে

ৰূপান্তৰবোৰৰ এটা সংহতি বুজাইছো যিয়ে বিশেষ সংক্ৰিয়াৰ অধীনত কিছুমান ধৰ্ম বা বিধি মানে। যেনে আগৰ {I, J, K} সংহতিটোৱে মেট্ৰিক্স গুণন সংক্ৰিয়াত সংবৰণ, সম্মিলন, একক আৰু বিপৰীত বিধি মানে। এইকেইটা বিধিমনা এনে আৰ্হিবোৰক গণিতত সংঘ বা group বোলে। তোমালোকে এই কথাবোৰ পিছত উচ্চ গণিতত পাবা। আমি ইয়াত আৰ্হিবোৰৰ যোগেৰে এখন নতুন বিচিত্ৰ গাণিতিক জগতৰ সোৱাদ ল'বহে বিচাৰিছো।

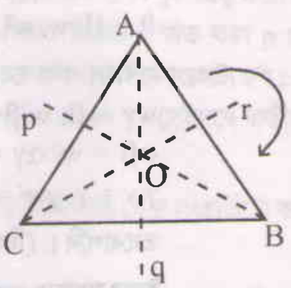
এই স্বস্তিকা চিত্ৰটোৰ চতুৰ্থাংশ, অৰ্থাৎ 90^0ৰ ঘূৰ্ণনক q ৰে বুজালে ইয়াত আচ্ছাদক ৰূপান্তৰবোৰৰ সংহতিটো হ'ব। $\{I, q, q^2, q^3\}$। ইয়াৰো তালিকা সজাই আগৰ দৰে বিধিবোৰ পৰীক্ষা কৰিবা।

নিপুকণ ঃ ছাৰ, এইদৰে দেখোন আমি সমবাহু ত্ৰিভুজ, বৰ্গ, পঞ্চভুজ আদি যিকোনো সুষম আৰ্হিৰ চিত্ৰ ল'ব পাৰো। আটাইবোৰেই একে আৰ্হিকে দিব নেকি? অৰ্থাৎ একেবোৰ বিধিকেই মানিব নেকি?

ছাৰ ঃ একে ধৰণৰ ৰূপান্তৰৰ পৰা পোৱা হ'লে আটাইবোৰেই মানিব।

নিপুকণ ঃ বেলেগ ধৰণৰ ৰূপান্তৰো কিবা আছে নেকি?

ছাৰ ঃ আছে। ধৰা আমি ডাঠ বোৰ্ডেৰে সজা সমবাহু ত্ৰিভুজ এটাকে ল'লো, যেনে a, b, c। এটা কাঠৰ বাকচত ত্ৰিভুজটো এনেদৰে বহুৱা হ'ল যাতে ইবাকচটোত সুন্দৰকৈ খাপ খাইপৰে। এতিয়া ত্ৰিভুজটোক নিজৰ ওপৰতে পৰাকৈ বাকচত বিভিন্ন ধৰণে উঠাই বহুওৱা হ'ব। মন কৰা যে, ইয়াত বিভিন্ন স্থানান্তৰ প্ৰক্ৰিয়া কেইটা হ'ল—



I = স্থানান্তৰ নাই (তৎসমক)

w = O বিন্দুত চিত্ৰটো 120^0 সোপাকে ঘূৰাই;

(যেনে $a \to b$, $b \to c$, $c \to a$)

w^2 = Oত 240^0 সোপাকে ঘুৰাই অৰ্থাৎ w.w

(ইয়াত $a \longrightarrow c, b \longrightarrow a, c \longrightarrow b$)

w^3 = Oত চিত্ৰটো 360^0 সোপাকে ঘুৰাই;

অৰ্থাৎ $a \longrightarrow a, b \longrightarrow b, c \longrightarrow c$ (স্থানান্তৰ নাই)

$\therefore w^3 = 1$

α = p ৰেখাত চিত্ৰটো 180^0ত লুটিয়াই দি, অৰ্থাৎ প্ৰতিফলন কৰি ;

ইয়াত $a \longrightarrow c, b \longrightarrow b, c \longrightarrow a$। তেনেদৰে

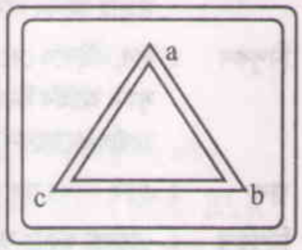
β = q ৰেখাত প্ৰতিফলন কৰি,

ইয়াত $a \longrightarrow a, b \longrightarrow c, c \longrightarrow b$।

γ = r ৰেখাত প্ৰতিফলন কৰি;

অৰ্থাৎ $c \longrightarrow c, a \longrightarrow b, b \longrightarrow a$।

এইদৰে সমবাহু ত্ৰিভুজটোৰ বিভিন্ন স্থানান্তৰৰ সহায়ত পোৱা ৰূপান্তৰৰ সংহতিটো হ'ব— লিখি লোৱা



কাঠৰ সাঁচাৰ ভিতৰত সমবাহু ত্ৰিভুজ

$P = \{I, w, w^2, \alpha, \beta, \gamma\}$

পৰীক্ষা কৰা যে $w.w = w^2, \gamma = w.\alpha, \beta = w^2.\alpha, wp = \alpha,$ $w\gamma = \beta, w^2\beta = \gamma, w^2\gamma = \alpha, \alpha w = \beta, \alpha w^2 = \gamma, \alpha\alpha = I$ $\alpha\beta = w, \alpha\gamma = w^2, \beta w^2 = \alpha, \beta\alpha = w^2, \beta^2 = I, \beta w = w,$ $\gamma w = \gamma, \gamma w^2 = \beta, \gamma\alpha = w, \gamma\beta = w^2, \gamma^2 = I$

তাৰোপৰি I. (যিকোনো ৰূপান্তৰ x) = x = x.I

ইয়াৰ সহায়ত ৰূপান্তৰৰ তালিকাখন হ'ব এনেদৰে

(ছাৰে লিখি দিয়ে আৰু ছাত্ৰ-ছাত্ৰীইঁতে সেমেনা সেমেনি কৰি গোটেইবোৰ ওপৰৰ পৰা টুকি লয়)

ছাৰ ঃ কেনে লাগিছে? কথাবোৰ বুজি পাইছানে?

নমিতা ঃ ছাৰ, মই বুজা নাই।

অংকিত ঃ ছাৰ, ময়ো।

$\bullet$	I	w	w^2	α	β	γ
I	I	w	w^2	α	β	γ
w	w	w^2	I	γ	α	β
w^2	w^2	I	w	β	γ	α
α	α	β	γ	I	w	w^2
β	β	γ	α	w^2	I	w
γ	γ	α	β	w	w^2	I

নীলাক্ষি : ছাৰ, মই বুজিছোনে নাই ময়েই নাজানো।

নিপুকণ : ছাৰ, ৰূপান্তৰবোৰৰ ওপৰত কৰা ৰূপান্তৰৰ পূৰণ বুজা নাই, এএইবোৰ লগলগাই পৰীক্ষা কৰিবলৈ যথেষ্ঠ টান হ'ব যেন লাগিছে।

ছাৰ : এৰা, তোমালোকে ঠিকেই কৈছা। কিন্তু মই আঁকি থোৱা বাকচত বহুৱা সমবাহু ত্ৰিভূজৰ মডেলটো ঘৰত বনাই ল'লে সহজতে কৰি পাবা। যেনে ধৰা, আমি $w.\alpha$ উলিয়াব লাগে। ইয়াৰ অৰ্থ O বিন্দুত ত্ৰিভূজটো প্ৰথমে সোঁপাকে 120^0 ঘূৰাই লৈ তাৰ পিছত চিত্ৰটোৰ গাত থকা p ৰেখাত প্ৰতিফলন কৰা। দেখিবা যে, ইয়াৰ ফলনত পোৱা স্থানান্তৰটো হ'ব $c \to c$, $a \to b$ আৰু $b \to a$, অৰ্থাৎ ই γ। $\therefore$ $w.\alpha = \gamma$। সেইদৰে বাকীবোৰো পৰীক্ষা কৰা।

তালিকাখন পূৰোৱাৰ পিছত পৰীক্ষা কৰি পাবা যে P সংহতিটো ৰূপান্তৰ সংক্ৰিয়াৰ অধীনত—

(i) সংবৰিত (ii) সন্মিলিত (iii) ইয়াত একক মৌল দেখদেখকৈ I আছে (iv) ইয়াৰ প্ৰতি মৌলৰে এটা বিপৰীত মৌল আছে, যেনে $(w^2)^{-1}$ অৰ্থাৎ w^2ৰ বিপৰীত $=w$, $\alpha^{-1} = \alpha$, $\beta^{-1} = \beta$, $\gamma^{-1} = \gamma$ ইত্যাদি।

কংকন : ছাৰ, সংক্ৰিয়াটোৱে বিনিময় বিধি নামানিব যেন পাইছো।

ছাৰ : কিয়?

কংকন : ছাৰ, ইয়াত $\alpha w^2 = \gamma$, কিন্তু $w^2.\alpha = \beta \therefore \alpha w^2 \neq w^2\alpha$)

ছাৰ ঃ বঢ়িয়া, তাৰোপৰি তালিকাখন মুখ্য কৰ্ণত প্ৰতিসম নহয়।

তৰালি ঃ ছাৰ, ম'ডেল ব্যৱহাৰ নকৰাকৈ স্থানান্তৰবোৰৰ গুণন কৰা কিবা বেলেগ পদ্ধতি নাই নেকি?

ছাৰ ঃ আছে। তোমালোকে সম্পৰ্কৰ কথা বেছি শিকা নাই কাৰণে মই কোৱা নাই। মই অলপ সহজকৈ বুজাই কৈছো— ৰ'বা।

ওপৰত Iৰ অৰ্থ $a \to a$

$b \to b$

$c \to c$

অৰ্থাৎ a, b, c শীৰ্ষবিন্দুবোৰ নিজৰ ওপৰতে মূল স্থানত থাকিব।

ইয়াক ধৰা মই এইদৰে লিখিলে $I=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$,

তলৰ শাৰীটোৱে সম্পৰ্কৰ সোঁহাতৰ স্তম্ভটো বুজাইছে। সেইদৰে লিখা

$w=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$, $w^2=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$,

$\alpha=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}$, $\gamma=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$

এতিয়া ধৰা আমি $w.\alpha$ উলিয়াব লাগে। ইয়াৰ অৰ্থ

$a \to b$ $a \to a$

$b \to c$ সম্পৰ্কটোৰ লগত αৰ সম্পৰ্ক অৰ্থাৎ $b \to b$ সংযোগ হ'ব।

$c \to a$ $c \to c$

গতিকে প্ৰথম সম্পৰ্কত $a \to b$ হ'লে দ্বিতীয় সম্পৰ্কই $b \to b$ কৰে।

এতেকে সংযোগ সম্পৰ্কটো হ'ব $a \to b \to b$, অৰ্থাৎ $a \to b$

তেনেদৰে (দ্বিতীয় শাৰী চোৱা) $b \to c \to c$, অৰ্থাৎ $b \to c$

আৰু তৃতীয় শাৰীৰ পৰা $c \to a \to a$, অৰ্থাৎ $c \to a$

ইয়াৰ ফলত $w.\alpha = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix} = \gamma$

আৰু $\gamma.\beta = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} = w^2$ হ'ব।

আটাইবোৰ গুণন এই উজু উপায়ে এটা এটাকৈ কৰি লৈ পাব পাৰিবা।

কংকন ঃ ছাৰ, তালিকাখন দেখিবলৈ ধুনীয়া, কিবা একোটা মিল থকা যেন লাগে।

ছাৰ ঃ তুমি কিবা বিশেষত্ব মন কৰিছা নেকি?

কংকন ঃ ছাৰ; I, w, w^2 এই ঘূৰণৰ ৰূপান্তৰ বুজোৱা অক্ষৰবোৰ দুটা চুকত আৰু α,β,γ অৰ্থাৎ প্ৰতিফলন বুজোৱা ৰূপান্তৰবোৰ দুটাকৈ বেলেগ চুকত আছে; অৰ্থাৎ এইবোৰে তালিকাখনক চাৰিটা বৰ্গৰ ভাগত ভগাইছে।

ছাৰ ঃ তুমি বেছ নজৰ কৰিছা। ঘূৰ্ণনবোৰক যদি আমি R আৰু প্ৰতিফলনবোৰক যদি F নাম দিও, তেন্তে তালিকাখন দেখাত এনে হ'ব (চিত্ৰ চোৱা)।

	R	F
R	R	F
F	F	R

অৰ্থাৎ যেন R.R = R, R.F = F, F.R = F আৰু F.F = R।

এই চুটি তালিকাখন তলৰ দুটা মৌলৰ তালিকাৰ সৈতে দেখাত একে প্ৰকৃততে এই সংঘবোৰৰ বাহাদুৰি তালিকাৰ প্ৰতিসমতাত।

x	1	−1
1	1	−1
−1	−1	1

x	E	O
E	E	O
O	O	E

E = Even (যুগ্ম সংখ্যা)

O = Odd (অযুগ্ম সংখ্যা)

নমিতা : ছাৰ, নিপুকণে সোধা মতে সমবাহু ত্ৰিভুজৰ সলনি বৰ্গ, আয়ত, পঞ্চভুজ আদিৰ স্থানান্তৰেৰেও এনে আৰ্হিৰ তালিকা পামনে?

ছাৰ : এইটো নিৰ্ভৰ কৰিব আমি সুষম চিত্ৰ একোটাৰ স্থানান্তৰবোৰ কি কি ধৰি তালিকা বনাম?

উদাহৰণস্বৰূপে, বৰ্গক্ষেত্ৰৰ সমতিৰ তালিকাখন এনে ধৰণৰ হ'ব যদি আমি ধৰো যে, বৰ্গক্ষেত্ৰ এটাৰ O বিন্দুত 90^0 ৰে ঘূৰোৱা ঘূৰ্ণনবোৰ $=1, w, w^2, w^3$

এটা বাহুৰ লম্ব সমদ্বিখণ্ডকত কৰা প্ৰতিফলন

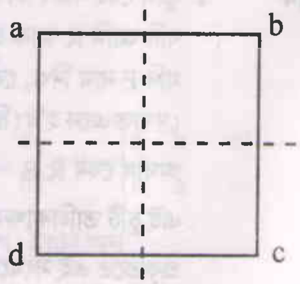
$=\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$

কৰ্ণ দুয়োটাতে কৰা প্ৰতিফলন ধৰা,

$=\delta_1, \delta_2$, তেন্তে এই আটাইবোৰ ৰূপান্তৰৰ সংহতিটো হ'ব।

$D = \{1, w, w^2, w^3 \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \delta_1, \delta_2\}$

এতিয়া ইয়াৰ পৰা তালিকা এখন সজাই আমি ওপৰত কৰাৰ দৰে কি কি বিধি সিদ্ধ কৰে পৰীক্ষা কৰি চাবা।



বহুভুজৰ বাহু বৃদ্ধি হ'লে তালিকাবোৰ যথেষ্ট দীঘলীয়া হ'ব, অৰ্থাৎ আটাইবোৰ বিধি পৰীক্ষা কৰাত জটিল হ'ব।

আমি আজিলৈ এইখিনিতে এৰিলো।

আশাকৰো তোমালোকে শিবিৰটোত যোগদান কৰি বহুতো নতুন নতুন কথা আৰু ধাৰণাৰ লগত চিনাকী হৈছা— এইবোৰে তোমালোকৰ গাণিতিক জীৱন আৰু কৰ্ম উদ্দীপ্ত কৰিব; তাকে আশা কৰি আমি মেলানি মাগিলো।

আটায়ে : বহুত, বহুত ধন্যবাদ ছাৰ; আকৌ লগ পাম।

* * * * * * *

গণিতৰ জনপ্ৰিয়তা আৰু শিক্ষা প্ৰণালীত একাণপতীয়াকৈ লাগি থকা ড° কৈলাশ গোস্বামী এজন সুবিদিত আৰু জনপ্ৰিয় গণিতজ্ঞ। অসম বিজ্ঞান সমিতি, অসম গণিত শিক্ষায়তনকে ধৰি বিভিন্ন অনুষ্ঠানৰ লগত দীৰ্ঘসূত্ৰীয়া সম্বন্ধৰে সক্ৰিয় কৰ্মী হিচাপে তেওঁ অজস্ৰ ৰচনা, প্ৰবন্ধ, প্ৰদৰ্শনী, বক্তৃতা, গাণিতিক কৰ্মশালা, খেল-ধেমালি আদিৰে গণিতক জনপ্ৰিয় কৰি তোলাৰ চেষ্টা কৰি আহিছে। ইতিমধ্যে প্ৰায় দুকুৰিতকৈও অধিক মৌলিক গ্ৰন্থ ৰচনাৰে শ্ৰীগোস্বামীয়ে ধেমালি-বিনোদনৰে সুস্বাদু আৰু আকৰ্ষণীয় গণিতৰ বৌদ্ধিক চিন্তা-চৰ্চাত সমল আগবঢ়াইছে।

অজান দেশত লিমাকণহঁত